த.பா.நி (க.வெ.) வரிசை எண்—283

முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்

(Analytical Geometry of Three Dimensions)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

எஸ். ராஜ்குமார், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
பி. எம்டி. கல்லூரி,
உசிலம்பட்டி, மதுரை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 283

© Tamil Nadu Text Book Society

Analytical Geometry of Three Dimensions

S. RAJKUMAR

Net Price Rs. 4-75
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare.'

Printed by
Ravishankar Printers,
84, *Perambur Barracks Road,*
Madras-7.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **'முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்'** என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் **283**ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை **318** நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

		பக்கங்கள்
	தோற்றுவாய் (Introduction) ...	1
1.	ஆய எண்களும் திசைகளும் (Co-ordinates and directions) ...	8
2.	தளம் (Plane) ...	33
3.	நேர்க்கோடுகள் (Straight Lines) ...	58
4.	ஆய எண்களின் நிலைமாற்றம் (Transformation of Co-ordinates) ...	92
5.	கோளம் (Sphere) ...	100
6.	கூம்பும் உருளையும் (Cone and Cylinder) ...	134
7.	மையக் கூம்பு வளையவுருக்கள் (Central Conicoids) ...	169
8.	பரவளைவுரு (Paraloloid) ...	213
	விடைகள் ...	233
	கலைச்சொற்கள் ...	237

தோற்றுவாய்

(Introduction)

இயற்கணித வழியில் முப்பரிமாண மெய்யான இயூக்கிலிடியன் வெளியின் (Three-dimensional real euclidean space) வடிவ கணிதத்தைப் பயிலப் போகின்றோம். பகுமுறை வடிவ கணிதத்தின் அடிப்படைக் கண்ணோட்டத்தில் பார்க்கும்போது, இங்கே இயற்கணிதம், கணக்குகளை விடுவிக்கும் கருவியாகவே பயன்படுகிறது என்பதை அறியலாம். இயற்கணிதத்தை நீக்கிவிட்டுப் பார்த்தால், இப்பாடத்திற்கென்றே தனிப்பட்ட வரையறுக்கப் பட்ட பொருள் இருப்பதை உணரமுடியும். இப்பாடம் இவ்வாறு எளிமையான முறையில் கையாளப்பட்டிருப்பது கணிதத்தின் மற்றப் பிரிவுகளிலும், கணிதமுறை பௌதீகவியலிலும் (Mathematical physics) இதன் பயனை நாம் அறிந்து கொள்ள உதவுகின்றது. தொடக்கக் கன வடிவ கணிதமும் (Elementary pure solid geometry), இருபரிமாண பகுமுறை வடிவ கணிதமும் வாசகர்களுக்கு அறிமுகமாகியிருப்பவை என்ற தற்கோளில் (assumption) ஆங்காங்கே இப்பிரிவுகளின் சில தேற்றங்களையும் கோட்பாடுகளையும் பயன்படுத்துகிறேன். இயற்கணிதத்தில் அணிக்கோவை (determinant) பற்றி மாணவர்கட்குத் தேவையான விளக்கமிருக்கும் என்று நம்புகிறேன்.

நாம் தற்போது ஆராயும் வடிவ கணிதமானது அளவு முறை வடிவ கணிதமாகும் (Metrical geometry). அது தொலை, கோணம் ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டது. இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பை விளக்குவது தொலைவாகவும், இரு திசைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைத் தருவது கோணமாகவும் உள்ளன. இவற்றின் அளவுகளானவை தரமான அளவைகளில் (Standard measurements) தரப்படுவது அவசியமாகிறது. இயூக்கிலிடியன் வெளியில் செங்கோணமானது கோணத்

தின தரமான அளவையாக எடுததுககொளளபபடுகினறபோது, நீளததின தரமான அளவையைப பறறித திடடமாககக கூற முடியாத நிலையில இருககினறோம இநத அளவைகளின அடிப படைத தனமைகளை ஏறறுககொணடு, புளளிகளுககும திசைகளுக கும இயறகணித குறியீடுகளைப பயனபடுததும முறைபறறி முத லாவதாக ஆராயவதுடன, தூரஙகளையும, கோணஙகளையும இந தக குறியீடுகளால குறிககும முறையையும தெரிநது கொளள வேணடும

முபபரிமாணப பகுமுறை வடிவ கணிதததை முறையாகத துவஙகுவதறகு முனனா, கன வடிவ கணிதததின சில பணபுகளை யும, முடிவுகளையும ஈணடு குறிபபிடுதல அவசியம எனறு கருது கினறேன

இரு புளளிகளைச சேரககும நேரககோடு முழுமையும அமை யும மேறபரபபு (Surface) தளம எனபபடும தளததைப பறறிய பினவரும சில முடிவுகள எளிதாக அறியபபடும

1 ஒரு நேரககோடடின இரு புளளிகள ஒரு தளததில அமைந தால, அககோடடின எலலாப புளளிகளும அநதத் தளத தில அமைகினறன

2 இரு தளஙகள ஒரு நேரககோடடில வெடடிக கொளளு கினறன

3 கொடுககபபடட நேரககோடடின வழிச செலலுமபடி அநேக தளஙகள அமைககபபட முடியும

4 ஒரு நேரககோடடின வழியாகவும, அதறகு வெளியே அமைநத புளளி வழியாகவும ஒரு தளம அமைககபபட முடியும

5 நேரககோடடில அமையாத மூனறு புளளிகள வழியாக ஒரேயொரு தளமே செலல முடியும

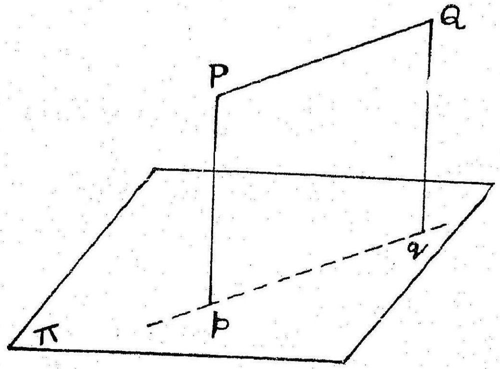
6 வெடடிக கொளளும இரு நேரககோடுகளின வழியே ஒரேயொரு தளமே செலல முடியும

7 இரு இணை கோடுகள வழியே ஒரேயொரு தளமே செலல முடியும.

சில வரையறைகளும் எளிதான முடிவுகளும்

1. குத்து வீழல் (Orthogonal projection) .

Pp, *Qq* ஆகியவற்றை π என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரைக.

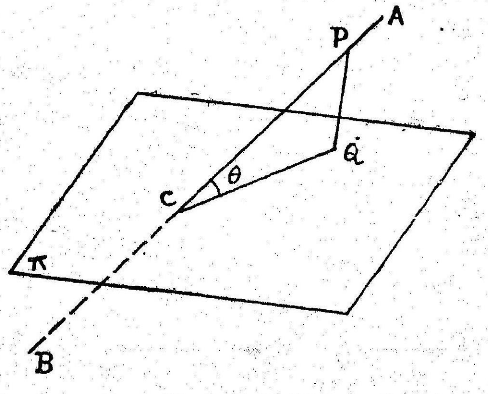


படம் 1

pq என்பது *PQ* விற்குத் தளம் π இல் குத்துவீழல் எனப்படும்.

2. ஒரு நேர்க்கோட்டிற்கும் ஒரு தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம்

படத்தில் *AB* என்ற நேர்க்கோட்டிற்கும், தளம் π க்கும்

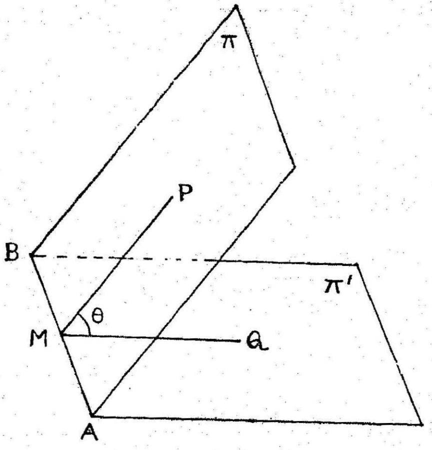


படம் 2

இடையே உள்ள கோணம் *AB* க்கும் தளத்தில் அதன் குத்து வீழலான *CQ* விற்கும் இடைப்பட்ட கோணமாகும்.

3. இரு தளங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம்

π, π' ஆகிய தளங்கள் AB இல் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. தளம் π' இல் QMஐ ABக்குச் செங்குத்தாக வரைக. அதேபோல்,

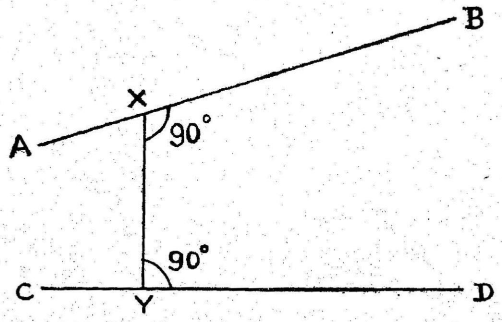


படம் 3

π என்ற தளத்தில் PM ஐ ABக்குச் செங்குத்தாக வரைக. $P\hat{M}Q$ இருதளங்களுக்கும் இடையே உள்ள கோணமாகும்.

4. ஒருதளக் கோடுகள் (Coplanar straight lines)

ஒரே தளத்தில் அமைந்த கோடுகள் ஒருதளக் கோடுகள் என அழைக்கப்படும்.



படம் 4

இரு நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கின்றனவாகவோ, இணையாகவோ இருப்பின், அவை ஒரு தளத்திலே அமைவன என்பதை அறிவோம்.

இரு நோககோடுகள வெவவேறு தளததில அமைந்து ஒனறை யொனறு சநதிககவிலலையெனில, அவை வெடடாக கோடுகள (Skew lines) என அழைககபபடும

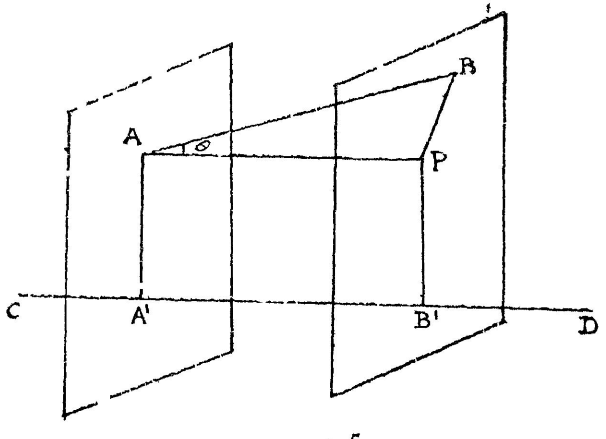
இரு வெடடாக கோடுகளுககு ஒரு பொதுவான செஙகுததுக கோடு உணடு அதுவே அவறறிறகு இடையேயுளள மீசசிறு தொலைவு (Shortest distance) எனபபடும

5 இரு நோககோடுகள இணையாக இருபபின, ஒவவொனறும மறறதன வழியே செலலும தளததிறகு இணையாக அமையும

6 ஒரு நோககோடு ஒரு தளததிறகு இணையாக இருநதால அது, அநதத தளமும அககோடடின வழியாகச செலலும வேறொரு தளமும வெடடிக கொளளும நோககோடடிறகு இணையாக அமையும

7 இரு இணை தளஙகள மூனறாவது தளததை வெடடுங கோடுகள இணையாக அமைகினறன

8 ஒரு நோககோடடின மேல மறறொரு நோககோட்டின் குததுவீழல



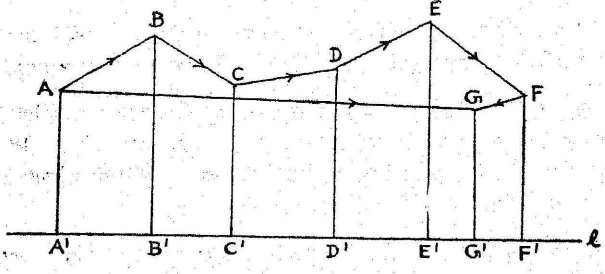
படம 5

CD இன மேல *AB* இன குததுவீழலைக காண, *A*, *B* ஆகிய புளளிகளின வழியே *CD* ககுச செஙகுததாக, அதை *A'*, *B'* எனற புளளிகளில வெடடுமபடியாக இரு தளஙகள வரைக *AP* ஐ *B* வழியாகச செலலும தளததிறகுச செஙகுததாக வரைக

APB'A' ஒரு செவவகமாகும *CD* இன மேல் *AB* இன குததுவீழல *A'B'* ஆகும

இரு நேர்க்கோடுகளிடையே உள்ள கோணம் θ என்றால், $A'B' = AP = AB\cos\theta$.

9. ஒரு நேர்க்கோட்டின்மேல் மற்றொரு கோட்டின் குத்து வீழல் அக்கோட்டுத் துண்டுகளின் (Segments) குத்து வீழல்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.



படம் 6

AG என்ற கோடு AB, BC, CD, DE, EF, FG ஆகிய ஆறு துண்டுகளை உடையதாக அமைந்துள்ளது. $A', B', \ldots\ldots$ என்பவை நேர்க்கோடு l இன் மேல், முறையே $A, B, \ldots\ldots$ ஆகியவற்றின் குத்து வீழல்களாகும்.

l இன் மேல் AG இன் குத்துவீழல் $= A'G'$

$$= A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F' + F'G'$$

$= AB, BC, \ldots$ ஆகிய துண்டுகளின் குத்து வீழல்களின் கூடுதல்.

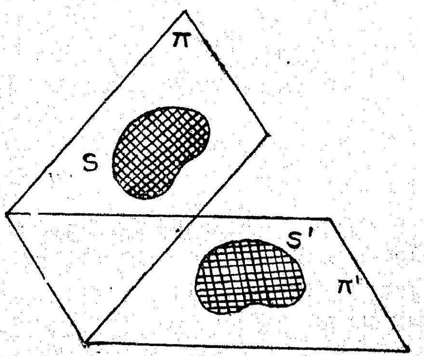
10. ஒரு தளத்தின்மேல் மற்றொரு தளத்தில் உள்ள பரப்பின் குத்து வீழல்

π, π' என்ற இருதளங்களிடையே உள்ள கோணம் θ என்க.

பரப்பு S இன் குத்து வீழல் S' என்போம்.

$S' = S\cos\theta$.

இதன் நிறுவல் (Proof) இங்குத் தரப்படவில்லை.



படம் 7

11. மூன்று தளங்கள் இரண்டிரண்டாக வெட்டிக் கொள்ளும் போது, பின்வரும் மூன்று வகைகள் கிடைக்கின்றன :

(i) அவைகளுக்கு ஒரு பொதுவான வெட்டுங்கோடு அமையும்.

(ii) அவைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும்.

(iii) அவைகளுக்கு ஒரு பொதுவான புள்ளி இல்லா விட்டால், அவை இரண்டிரண்டாக வெட்டுங்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமையும்.

12. ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப் பட்டால், அது அந்தத் தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக அமையும்.

13. ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு தளத்தில் உள்ள எவையேனும் இரு கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருப்பின், அது அந்தத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையும்.

14. எல்லாப் பக்கங்களிலும் தளங்களால் கட்டப்பட்ட கன உருவம் பன்முகி (Polyhedron) என அழைக்கப்படும். மூன்று சோடி இணைத்தளங்களால் உருவாக்கப்பட்ட பன்முகி, இணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped) எனப்படும். அதன் முகங்கள் செவ்வ கங்கள் எனில், அது செவ்வக இணைகரத் திண்மம் என்று கூறப்படும். நான்கு முகங்களைக் கொண்ட கன உருவம் நான்முகி (Tetrahedron) என அழைக்கப்படும். ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளை முக் கோணத்தின் தளத்திலமையாத ஒரு புள்ளியோடு இணைக்கும் போது, நான்முகி உருவாகின்றது.

பன்முகியின் இரு முகங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோடு ஒரு விளிம்பு (Edge) ஆகும். அதன் மூன்று முகங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியே ஓர் உச்சி (Vertex) ஆகும். F, V, E என்பவை முறையே ஒரு பன்முகியின் முகங்கள், உச்சிகள், விளிம்புகள் ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்குமெனில்,

$$F+V=2+E$$ (ஆய்லரின் தேற்றப்படி)

இவண் நமக்குத் தேவையான பன்முகிகளைப் பற்றிய குறிப்பு கள் மட்டும் தரப்பட்டுள்ளன.

1. ஆய எண்களும் திசைகளும்

(Co-ordinates and directions)

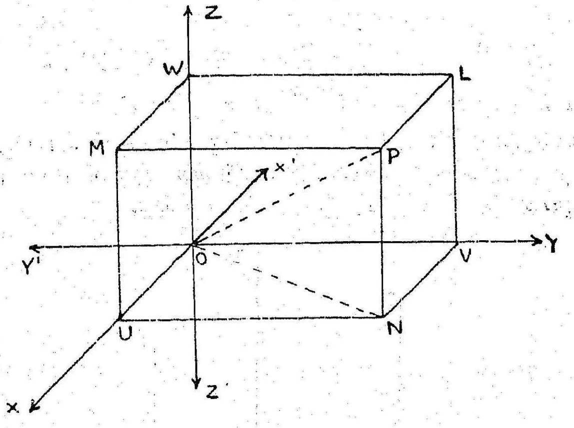
மூன்று நிலைத்த தளங்களை (Fixed planes)ப் பொருத்து, வெளியில் ஒரு புள்ளியின் நிலை (Position) குறிக்கப்படுகின்றது. இந்தத் தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி ஆதி (Origin) எனப்படும். இவை ஆயத்தளங்கள் (Co-ordinate planes) எனவும், அவை இரண்டிரண்டாக வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்க்கோடுகள் ஆய அச்சுகள் (Co-ordinate axes) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக இத்தளங்களிலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரங்கள் அதன் ஆய எண்களெனப்படும். மூன்று ஆயத்தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமையுமெனின், ஆய அச்சுகள், செவ்வக அச்சுகள் (Rectangular axes) என்று கூறப்படும்.

1·1. ஒரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் தரப்பட்டிருந்தால், அதன் நிலையை முற்றிலுமாக அறியலாம். YOZ, ZOX, XOY ஆயத்தளங்களாகவும், $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ அச்சுகளாகவும் கொள்க. LP, MP, NP என்பவை P என்ற புள்ளியின் ஆய எண்களாகக் கொள்க. MPN, NPL, LPM ஆகிய தளங்கள் முறையே ஆயத்தளங்கள் YOZ, ZOX, XOY க்கு இணையாக உள்ளன. அவை ஆய அச்சுகளைப் படத்தில் உள்ளபடி முறையே U, V, W என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்தால். OP ஐ மூலை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக இணைகரத் திண்மம் கிடைக்கின்றது. இதன் இணை விளிம்புகள் சமமாவதால்,

$$LP=OU, \ MP=OV, \ NP=OW.$$

ஆகவே ஒரு புள்ளியின் நிலையை அறிய, அச்சுகளில் OU, OV, OW என்பவை அப்புள்ளியின் ஆய எண்களுக்குச் சமமாக இருக்கும்படி எடுத்துக்கொண்டு, புள்ளிகள் U, V, W வழியாக ஆயத்தளங்

களுக்கு இணையாகத் தளங்கள் வரைதல் வேண்டும். இத்தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியே நமக்குத் தேவையான புள்ளியாகும். திசைகள் OX, OY, OZ நேராகவும் (Positive), திசைகள் OX', OY', OZ' எதிராகவும் (Negative) கொள்ளப்படும். ஒரு புள்ளி



படம் 8

தரப்படுமெனில், x, y, z ஆகிய மூன்று எண்கள் ஒரே வழியில் தான் தீர்மானிக்கப்பட முடியும். மறுதலையாக, $x\ y, z$ என்ற எண்கள் (நேரான அல்லது எதிரான) தரப்பட்டால், மேலே விவரிக்கப்பட்ட முறையில் புள்ளியை ஒரே வழியில்தான் காண இயலும். ஆகவே புள்ளி P ஐப் பற்றிப் பேசும்போது, "புள்ளி (x, y, z)" என்றே குறிப்பிடலாம்.

1·2. வெளி முழுமையும் ஆயத்தளங்களால் எட்டுப் பகுதி களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அவைகள் $OXYZ$, $OX'YZ$, $OXY'Z$ $OXYZ'$, $OXY'Z'$, $OX'YZ'$, $OX'Y'Z$, $OX'Y'Z'$ என்பவையே. முதற் பகுதியில் ஒரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் யாவும் நேராக உள்ளன. அதாவது, $OXYZ$ என்ற பகுதியில் புள்ளி (x, y, z)ஐ எடுத்துக்கொண்டால், ஏனைய ஏழு பகுதிகளில் அப் புள்ளி அமையுமானால் அதன் ஆய எண்கள் முறையே $(-x, y, z)$, $(x, -y, z)$, $(x, y, -z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, y, -z)$, $(-x, -y, z)$, $(-x, -y, -z)$ ஆகும். ஆதியின் ஆய எண்கள் $(0, 0, 0)$ என்பவையே.

1·3. படம் 8 இல், $OU=x$, $OV=y$, $OW=z$

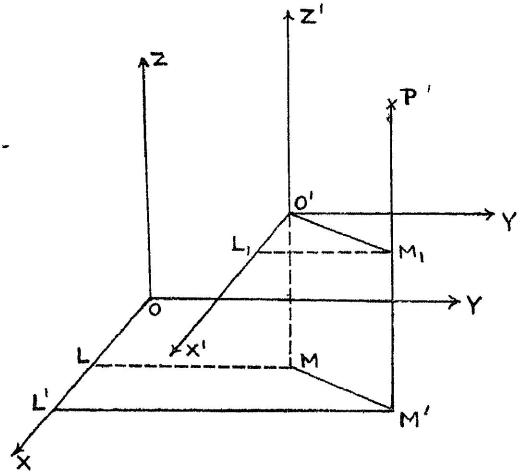
$$UN \perp OX; \quad PN \perp ON.$$

ஆகவே, $ON^2 = OU^2 + UN^2$
$$= OU^2 + OV^2$$
$$= x^2 + y^2$$
$$OP^2 = ON^2 + NP^2$$
$$= ON^2 + OW^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$

∴ ஆதியிலிருந்து P இன் தொலைவு $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1 4. ஆதி மாற்றம் செய்தல் (Change of origin)

ஆய அச்சுகளின் திசையை மாற்றாமல், ஆதியை Oஇலிருந்து $O'(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளிக்கு மாற்றுக. புள்ளி $P(x, y, z)$இன் புதிய ஆய எண்கள் (X, Y, Z) எனக் கொள்க.



படம் 9

புதிய ஆய அச்சுகள் பழையவைகளுக்கு இணையாக உள்ளன.

$$OL = x_1, \quad LM = y_1, \quad MO' = z_1$$
$$OL' = x, \quad L'M' = y, \quad M'P = z$$
$$O'L_1 = X, \quad L_1M_1 = Y, \quad M_1P = Z$$

படம் 9 இல், $O'MM'M_1$ ஒரு செவ்வகமாகும்.

$$MO' = M'M_1$$
$$M'P = M'M_1 + M_1P$$
$$= MO' + M_1P$$
$$\therefore \quad z = z_1 + Z$$

அவ்வாறே, $x = x_1 + X$
$$y = y_1 + Y$$

ஆகவே அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் இடப்பெயற்சி செய்யும்போது, ஆய எண்களை நிலைமாற்றம் செய்யும் திட்டம் (**Scheme of transformation**)

$$x = x_1 + X ;\quad y = y_1 + Y ;\quad z = z_1 + Z$$ ஆகும்.

1·5. புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ஆகியவைகளுக் கிடையே உள்ள தொலைவைக் கண்டுபிடித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை P, Q என்க.

அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் ஆதியை Q வுக்கு மாற்றுக. P இன் புதிய ஆய எண்கள் (X_1, Y_1, Z_1) என்றுகுக.

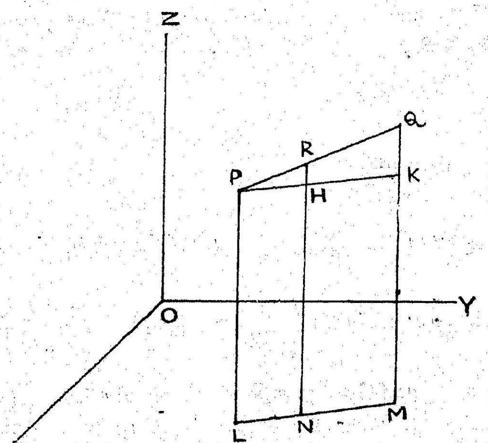
நிலைமாற்றத் திட்டப்படி,

$$x_1 = x_2 + X_1$$
$$y_1 = y_2 + Y_1$$
$$z_1 = z_2 + Z_1$$

$$\therefore\ PQ^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

அதாவது $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

1·6. இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டைக் கொடுத்த விகிதத் தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆய எண்களைக் காணல்



படம் 10

P, Q கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளாகவும், R என்ற புள்ளி PQ ஐ $l : m$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளாகப் பிரிப்பதாகவுங்

கொள்க. இப்புள்ளிகளின் ஆய எண்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x, y, z) ஆகுக.

z அச்சுக்கு இணையாக வரையப்படும் கோடுகளான PL, QM, RN, தளம் XOYஐ L, M, N என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

P, Q, R, L, M, N ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன. P இன் வழியாக LM க்கு இணையாக வரையப்படும் கோடு இத் தளத்தில் அமையும். இக்கோடு QM, RN ஐப் புள்ளிகள் K, H இல் சந்திக்கட்டும்.

$$\frac{HR}{KQ} = \frac{PR}{PQ} = \frac{l}{l+m}$$

$$LP = z_1; \quad MQ = z_2; \quad NR = z$$

$$\therefore \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{l}{l+m}$$

$$\therefore z = \frac{lz_2 + mz_1}{l+m}$$

இவ்வாறே $x = \dfrac{lx_2 + mx_1}{l+m}$; $y = \dfrac{ly_2 + my_1}{l+m}$

குறிப்பு : (i) PQஐ R என்ற புள்ளி $l : m$ என்ற விகிதத்தில் புறம்பாகப் பிரித்தால், மேற்கண்ட முடிவுகளில் 'm' க்குப் பதிலாக '$-m$' ஐப் பிரதியிடுக.

எனவே $x_R = \dfrac{lx_2 - mx_1}{l-m}$; $y_R = \dfrac{ly_2 - my_1}{l-m}$;

$$z_R = \frac{lz_2 - mz_1}{l-m}$$

(ii) R ஆனது PQ இன் நடுப்புள்ளியெனில், $l = m = 1$ எனப் பிரதியிடுக.

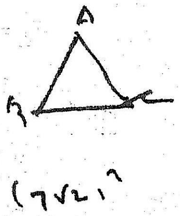
ஆகவே R இன் ஆய எண்கள் $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$ ஆகும்.

(iii) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) என்றால் அதன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி $(\frac{1}{3}\Sigma x_1, \frac{1}{3}\Sigma y_1, \frac{1}{3}\Sigma z_1)$ ஆகும்.

(iv) PQ ஐ $k : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆய எண்கள் $\left(\dfrac{x_1+kx_2}{1+k}, \dfrac{y_1+ky_2}{1+k}, \dfrac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ ஆகும்.

மாதிரி 1: புள்ளிகள் $(2, 3, 5)$, $(-1, 5, -1)$, $(4, -3, 2)$ என்பன ஓர் இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

கொடுத்த புள்ளிகளை A, B, C எனக் கொள்க.



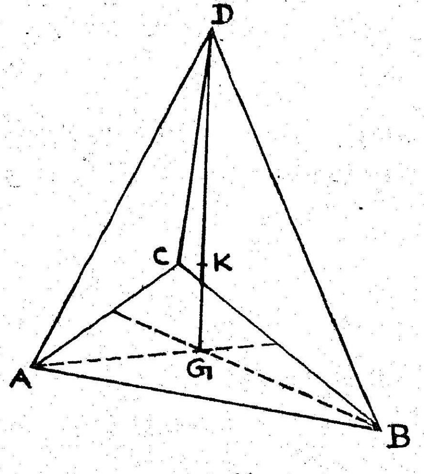
$$AB = \sqrt{(2+1)^2+(3-5)^2+(5+1)^2} = 7$$
$$BC = \sqrt{(1+4)^2+(5+3)^2+(1+2)^2} = 7\sqrt{2}$$
$$CA = \sqrt{(4-2)^2+(3+3)^2+(2-5)^2} = 7$$

மேலும்,

$$AB^2+CA^2=49+49$$
$$=BC^2$$

ஆகவே $\triangle ABC$ ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணம்.

மாதிரி 2: ஒரு நான்முகியின் உச்சிகளை எதிர்முகங்களின் நடுக்கோட்டுச் சந்திகளுடன் இணைக்கும் நான்கு கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக.



படம் 11

நான்முகியின் உச்சிகள் $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ என்க.

D ஐயும் $\triangle ABC$ இன் நடுக்கோட்டுச் சந்தியான G ஐயும் சேர். $DK : KG = 3 : 1$ ஆக இருக்கும்படியாக DG ஐ K இல் வெட்டுக.

G இன் ஆய எண்கள் $[\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3), \quad \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3), \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)]$ ஆகும்.

$$x_K=\frac{3x_G+x_D}{3+1}$$
$$=\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)$$

இதே போல்

$$y_K=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4);$$

$$z_K=\frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)$$

K இன் ஆய எண்கள் நான்முகியின் உச்சிகளின் ஆய எண்களில் சமச்சீராக இருப்பதால், இப்புள்ளி மற்ற மூன்று கோடுகளிலுங்கூட இவ்விதமே அமையும். அதாவது கேள்வியில் தந்துள்ள நான்கு கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

மாதிரி 3: புள்ளிகள் $A\ (4, 3, 2)$, $B\ (1, 2, -3)$ ஆகியவற்றைச் சேர்க்கும் கோடு YOZ, XOY தளங்களை முறையே C, D இல் சந்தித்தால், அப் புள்ளிகளின் ஆய எண்களைக் கண்டு அவை AB ஐப் பிரிக்கும் விகிதங்களையும் கணக்கிடுக.

AB ஐ $l:\ m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $\left(\frac{l+4m}{l+m}, \frac{2l+3m}{l+m}, \frac{-3l+2m}{l+m}\right)$ ஆகும். இப்புள்ளி YOZ தளத்தில் அமைந்தால், அதன் x ஆய எண் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{l+4m}{l+m}=0$$

இதிலிருந்து, $\frac{l}{m}=-4$

ஆகவே C இன் ஆய எண்கள் $\left(0, \frac{5}{3}, \frac{-14}{3}\right)$ ஆவன. இவ்விகிதம் எதிர்க்குறியோடிருப்பதால், ABஐ C புறம்பாக $4:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

D ஆனது XOY தளத்தில் அமைவதால், z ஆய எண் பூச்சியமாகும்.

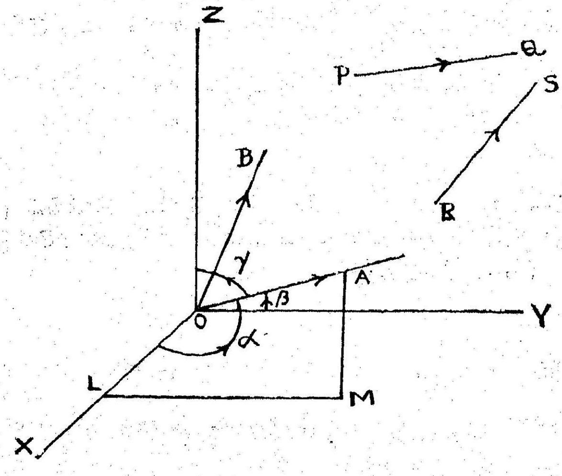
$$\frac{-3l+2m}{l+m}=0.$$

இதிலிருந்து, $\frac{l}{m}=\frac{2}{3}$

ஆகவே D இன் ஆய எண்கள் $\left(\frac{14}{5}, \frac{13}{5}, 0\right)$ ஆவன. ABஐ D உள்ளாக $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

1·7. ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (Direction-Cosines)

P இலிருந்து Qவுக்கு என்ற போக்கில் (sense) வரையப்பட்ட PQ என்ற ஒரு நேர்க்கோட்டை வெளியில் எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 12

ஆதி வழியாக ஓர் அலகு நீளம் (unit length) உள்ள OA என்ற கோடு PQவிற்கு இணையாகவும் அதற்கு ஒரே போக்கிலும் (same sense) வரைக.

OA இன் திசையும் PQ இன் திசையும் A இன் ஆய எண்களால் தீர்மானிக்கப்படும். ஆய அச்சுகளின்மேல் OA இன் குத்து வீழல்களே A இன் ஆய எண்களாகும். OA, ஆய அச்சுகளோடு உண்டாக்கும் கோணங்கள் முறையே α, β, γ எனில்,

$$x_A = OA \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$y_A = OA \cos \beta = \cos \beta$$

$$z_A = OA \cos \gamma = \cos \gamma$$

ஆகவே A இன் ஆய எண்கள் $(\cos \alpha, \ \cos \beta, \ \cos \gamma)$ ஆகும்.

வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$OA^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$OA=1$ ஆவதால்,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

α, β, γ என்ற கோணங்களின் கொசைன்களை நேர்க்கோடு PQ இன் திசைக் கொசைன்களெனப்படும். ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் ஒன்றுக்குச் சமமாகும்.

PQ இன் போக்கு எதிர் திசையிலிருந்தால், OA க்குப் பதிலாக A' என்பதின் ஆய எண்கள் $(-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma)$ ஆக இருக்குமாறு OA' என்ற நேர்க்கோடு வரையப்படுதல் வேண்டும். ஆகவே, மூன்று திசைக் கொசைன்களின் குறிகளும் மாற்றப் படுகின்றன.

மேற்கண்ட வரையறையிலிருந்து, நேர்ப்போக்கில் (Positive sense) ஆய அச்சுகளின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ஆகும்.

துணை முடிவு

P இன் ஆய எண்கள் (x, y, z) எனின் OP இன் திசைக் கொசைன்கள் $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ ஆகும். இங்கு $OP=r$ என்றறிக.

1·8. இரு நேர்க்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம்

படம் 12 இல், R இலிருந்து S க்கு என்ற போக்கில் வரையப்பட்ட RS என்ற நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ எனக் கொள்க. ஓர் அலகு நீளமுள்ள OB என்ற நேர்க்கோடு RS க்கு இணையாகவும் அதற்கு ஒரு போக்கிலும் வரையப்படுமெனின், B இன் ஆய எண்கள் $(\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma')$ ஆகும். கோணம் AOB ஆனது PQ, RS ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. பொதுவாக இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளுவதில்லை.

இரு சமபக்க முக்கோணம் AOB இல், கோணம் AOB ஐ θ என்க.

$\triangle AOB$ இல் $\quad AB^2 = 2 - 2\cos\theta$

மேலும்

$$AB^2 = (\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + (\cos\beta - \cos\beta')^2 + (\cos\gamma - \cos\gamma)^2$$

ஆகவே

$$2-2\cos\theta = (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+(\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma')-2(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma')$$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1 = \cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'$ என்பதால், θ இன் மதிப்பு பின்வரும் வாய்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும்.

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

குத்து வீழல் முறை

OB இன் மேல் OA இன் குத்து வீழல் $= OB$ இன் மேல் OL, LM, MA ஆகிய துண்டுகளின் குத்து வீழல்களின் கூடுதல்.

அதாவது $OA\cos\theta = x_A\cos\alpha'+y_A\cos\beta'+z_A\cos\gamma'$

உட்பிரிவு 1·7 இன் படி, $OA=1$; $x_A=\cos\alpha$;

$y_A=\cos\beta$; $z_A=\cos\gamma$

$\therefore \cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'$

1·9. திசைத் தகவுகள் (Direction-ratios)

ஒரு கோட்டின் திசைக் கொசைன்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருப்பதால், அதன் திசையை அதன் திசைக் கொசைன்களுக்கு விகிதப் பொருத்தத்தில் உள்ள மூன்று எண்களைக் கொண்டு விவரிப்பது போதுமானதாகவும் அதிக அனுகூலமானதாகவும் இருக்கின்றது. இந்த எண்களையே நேர்க் கோட்டின் திசைத் தகவுகளென அழைக்கிறோம்.

ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ எனவும், அதன் திசைத் தகவுகள் a, b, c எனவுங்கொள்வோம்.

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=k \text{ (என்க)}$$

$\therefore \cos\alpha=ka$; $\cos\beta=kb$; $\cos\gamma=kc$

வாய்பாடு $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ இல் பிரதியிடுக.

$\therefore k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2=1$

$i.\ e.,\ k^2(a^2+b^2+c^2)=1$

அதாவது $k=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ஆகவே நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ஆவன.

1·10. இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைத் தகவுகளைக் கொண்டு அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணல்

கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் (a, b, c); (a', b', c') எனக் கொள்க. இக்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ ஆக இருப்பின்,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{\Sigma a^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{\Sigma a^2}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{\Sigma a'^2}}, \quad \cos\beta' = \frac{b'}{\sqrt{\Sigma a'^2}}, \quad \cos\gamma' = \frac{c'}{\sqrt{\Sigma a'^2}}$$

கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ எனில்,

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\Sigma a^2}}\cdot\frac{a'}{\sqrt{\Sigma a'^2}} + \frac{b}{\sqrt{\Sigma a^2}}\cdot\frac{b'}{\sqrt{\Sigma a'^2}} + \frac{c}{\sqrt{\Sigma a^2}}\cdot\frac{c'}{\sqrt{\Sigma a'^2}}$$

i. e., $$\cos\theta = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}}$$

குறிப்பு: (i) $\text{Sin}^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$= 1-\frac{(aa'+bb'+cc')^2}{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2}{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}$$

$$= \frac{\Sigma(bc'-b'c)^2}{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}$$ (இலக்ரான்ஜின் முற்றொருமையின்படி)

$$\therefore \sin\theta = \frac{\sqrt{\Sigma(bc'-b'c)^2}}{\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}}$$

(ii) இரு நேர்க்கோடுகள் செங்குத்தாக அமைய நிபந்தனை

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = 0$$

அதாவது, $\dfrac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}}=0$

i. e., $aa'+bb'+cc'=0$

(iii) இரு நேர்க்கோடுகள் இணையாக அமைய நிபந்தனை

$$\theta=0$$

$$\therefore \sin\theta=0$$

அதாவது, $\dfrac{\sqrt{\Sigma(bc'-b'c)^2}}{\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a'^2)}}=0$

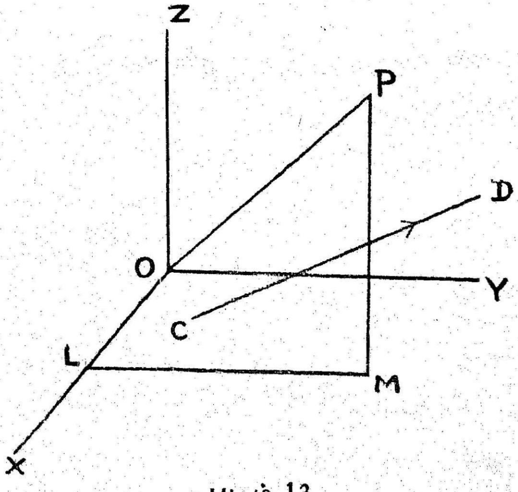
i. e., $(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2=0$

i. e., $bc'-b'c=0=ca'-c'a=ab'-a'b$

i. e. $\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$, ...

$$\therefore \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

1·11. கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின்மேல் மற்றொரு நேர்க்கோட்டின் குத்து விழலைக் காணல்



படம் 13

கொடுக்கப்பட்ட கோடு CD ஆகவும் அதன் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ஆகவுங்கொள்க. OP

என்ற நேர்க்கோட்டில் P இன் ஆய எண்கள் (x, y, z) எனக் கொள்க.

CD இன் மேல் OP இன் குத்து வீழல் $= CD$ இன் மேல் OL, LM, MP என்பவையின் குத்து வீழல்களின் கூடுதல்.

$$= OL \cos \alpha + LM \cos \beta + MP \cos \gamma$$
$$= x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

$\cos \alpha = l$, $\cos \beta = m$, $\cos \gamma = n$ எனப் பிரதியிட்டால்,

CD இன் மேல் OP இன் குத்து வீழல் $= ln + my + nz$ ஆகும்.

1·12. ஒரு கோட்டின்மேல் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் மற்றொரு நேர்க்கோட்டின் குத்து வீழலைக் காணல்

இரு புள்ளிகளை $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ எனக் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு CD ஆகவும் அதன் திசைக் கொசைன்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ஆகவுங்கொள்க.

ஆய அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் ஆதியை P க்கு மாற்றுக. Q இன் புதிய ஆய எண்கள் (X_2, Y_2, Z_2) என்றால்,

$$x_2 = x_1 + X_2,\ y_2 = y_1 + Y_2,\ z_2 = z_1 + Z_2$$

அச்சுகளின் திசை மாறாது இருப்பதால், CD இன் திசைக் கொசைன்களில் மாறுதல் எதுவும் இராது.

முந்தைய முடிவின்படி,

CD இன் மேல் PQ இன் குத்து வீழல் $= lX_2 + mY_2 + nZ_2$

$$= l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$$

1·13. ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களுக்கும் அதன் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் ஆய எண்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகளை அறிதல்

ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ எனக் கொள்க. $P(x, y, z)$ அக் கோட்டின்மேல் ஆதியிலிருந்து r என்ற தூரத்தில் அமைந்த புள்ளியாகும்.

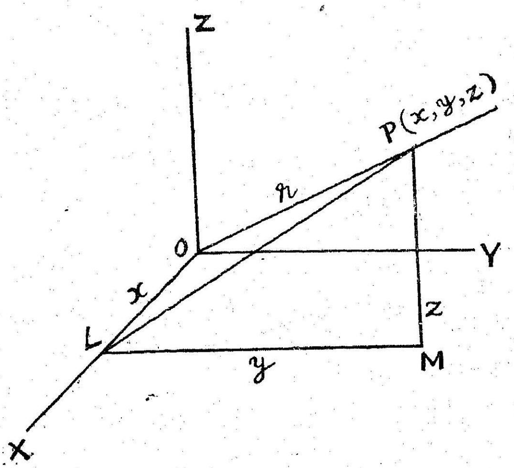
PM, தளம் XOY க்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால், $PM \perp OL$ ஆகும்.

$LM \perp OL$.

ஆகவே, PLM என்ற தளத்திற்கு OL செங்குத்தாக இருக்கும்.

$\therefore OL \perp PL$.

x அச்சின் மேல் OP இன் குத்து வீழல் OL ஆகும்.



படம் 14

அதாவது, $OL = OP \cos \alpha$

i.e., $x = r \cos \alpha$

அவ்வாறே $y = r \cos \beta$,

$z = r \cos \gamma$

$$\therefore \quad \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\cos \beta} = \frac{z}{\cos \gamma} = r$$

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டைப் பொருத்தவரை, அதன் திசைக் கொசைன்கள் மாருத கணியங்களாகும். அதன்மேல் அமையும் ஏதேனுமொரு புள்ளியின் நிலை r இன் மதிப்பைப் பொருத்ததாகும். எனவே, அக்கோட்டின்மேல் அமையும் புள்ளியின் ஆய எண்களை r இன் துணைகொண்டு தரமுடியுமென அறியலாம். அதாவது, கொடுத்த கோட்டின்மேல் ஏதேனுமொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் (lr, mr, nr) என்ற வடிவத்தில் பெறப்படும். r ஒரு துணையலகு (Parameter) என்று அழைக்கப்படும்.

1·14. கொடுத்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் திசைத் தகவுகளைக் கணக்கிடுதல்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்க.

அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் ஆதியை P க்கு மாற்றுக.

Q இன் புதிய ஆய் எண்கள் (X_2, Y_2, Z_2) எனின்,

$x_2 = x_1 + X_2, \quad y_2 = y_1 + Y_2, \quad z_2 = z_1 + Z_2$

PQ இன் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்போம். முந்தைய முடிவுப்படி,

$$\frac{X_2}{\cos\alpha} = \frac{Y_2}{\cos\beta} = \frac{Z_2}{\cos\gamma}$$

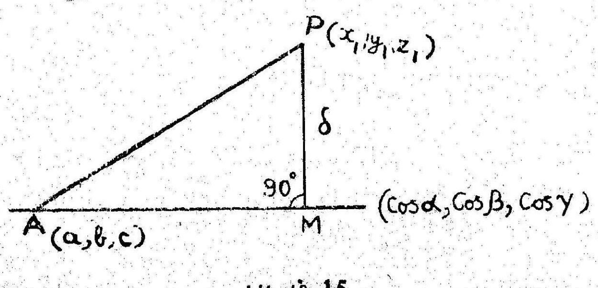
$$\text{i. e., } \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2 - z_1}{\cos\gamma}$$

$$\text{i. e., } \frac{x_1 - x_2}{\cos\alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\cos\beta} = \frac{z_1 - z_2}{\cos\gamma}$$

எனவே PQ இன் திசைக் கொசைன்கள் $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்தில் அமைகின்றன.

1·15. கொடுத்த நேர்க்கோட்டிலிருந்து தந்துள்ள புள்ளியின் தூரத்தைக் கணக்கிடுதல்

நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ஆகவும், $A(a, b, c)$ அதன்மேல் அமைந்த புள்ளியாகவும் கொள்க.



படம் 15

$P(x_1, y_1, z_1)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி என்க. நேர்க்கோட்டிற்கு PM ஐச் செங்குத்தாக வரைக.

AM= கொடுத்த நேர்க்கோட்டின் மேல் AP இன் குத்து வீழல்

$$=(x_1-a)\cos\alpha+(y_1-b)\cos\beta+(z_1-c)\cos\gamma$$

$$AP=\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}$$

$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma$ எனப் பிரதியிடுக.

$$PM^2=AP^2-AM^2$$
$$=\Sigma(x_1-a)^2-\left\{\Sigma l\,(x_1-a)\right\}^2$$
$$=(l^2+m^2+n^2)\,[(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2]-[l\,(x_1-a)+m\,(y_1-b)+n\,(z_1-c)]^2$$
$$=\Sigma[n\,(y_1-b)-m\,(z_1-c)]^2$$

$$\therefore\ PM=\sqrt{\Sigma[n(y_1-b)-m\,(z_1-c)]^2}$$

குறிப்பு: கொடுத்த கோட்டின் மேல் P அமைந்தால், $PM=0$

$$\therefore\ \Sigma\,[n\,(y_1-b)-m\,(z_1-c)]^2=0$$

அதாவது, $n\,(y_1-b)-m\,(z_1-c)=0,$
$l\,(z_1-c)-n\,(x_1-a)=0,$
$m\,(x_1-a)-l\,(y_1-b)=0.$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{y_1-b}{m}=\frac{z_1-c}{n}\ ;\ \frac{z_1-c}{n}=\frac{x_1-a}{l}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore\ \frac{x_1-a}{l}=\frac{y_1-b}{m}=\frac{z_1-c}{n}$$

மாதிரி 4: இரு நெருங்கிய நிலைகளில் ஒரு நகரும் நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $l,\ m,\ n\ ;\ l+\delta l,\ m+\delta m,\ n+\delta n$ ஆக உள்ளன. கோட்டின் இரு நிலைகளுக்கிடையே உள்ள சிறிய கோணமான $\delta\theta$ இன் மதிப்பைத் தரும் கோவையைக் காண்க.

ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களில் வர்க்கங்களின் கூடுதல் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருப்பதால்,

$$l^2+m^2+n^2=(l+\delta l)^2+(m+\delta m)^2+(n+\delta n)^2=1$$

இதிலிருந்து,

$$2l\delta l+2m\delta m+2n\delta n+(\delta l)^2+(\delta m)^2+(\delta n)^2=0$$

மேலும்

$$\cos\delta\theta = l(l+\delta l)+m(m+\delta m)+n(n+\delta n)$$
$$=1+l\delta l+m\delta m+n\delta n$$

$$\therefore\ (\delta l)^2+(\delta m)^2+(\delta n)^2 = -2(l\delta l+m\delta m+n\delta n)$$
$$= -2(\cos\delta\theta-1)$$
$$= 4\sin^2\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)$$

$\frac{\delta\theta}{2}$ சிறிதெனின் $\dfrac{\sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)}{\frac{\delta\theta}{2}} = 1$ (தோராயமாக)

$$\sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right)=\frac{\delta\theta}{2}$$

$$\therefore\ (\delta l)^2+(\delta m)^2+(\delta n)^2=(\delta\theta)^2$$

மாதிரி 5 இரு கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $l+m+n=0$, $2lm+2ln-mn=0$ என்ற சமன்பாடுகளில் பொருந்துமெனின், அக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து l ஐ நீக்கினால்,

$$2(m+n)^2+mn=0$$

அதாவது, $2m^2+5mn+2n^2=0$

i.e., $(m+2n)\ (2m+n)=0$

$$\therefore\ m+2n=0 \text{———(i)}$$
$$2m+n=0 \text{———(ii)}$$

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) எனக் கொள்க.

முடிவு (i) இன்படி, $m_1=-2n_1$

ஆனால் $l_1+m_1+n_1=0$

$$l_1=n_1$$

முடிவு (ii) இன்படி,

$$2m_2=-n_2$$

ஆனால் $l_2+m_2+n_2=0$

$$\therefore\ l_2=m_2$$

அதாவது, $\frac{l_1}{1}=\frac{m_1}{-2}=\frac{n_1}{1}=\frac{1}{\sqrt{6}}$;

$$\frac{l_2}{1}=\frac{m_2}{1}=\frac{n_2}{-2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

θ என்பது இக் கோடுகளின் இடையே உள்ள கோணம் என்றால்,

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-\frac{2}{6}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள குறுங்கோணம் $=\cos^{-1}(\frac{1}{2})$

$$=60^\circ$$

மாதிரி **6 :** இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $al+bm+cn=0$, $fmn+gnl+hlm=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. அக்கோடுகள் செங்குத்தாக அமையுமெனில் $\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}=0$ எனவும், அவை இணையாக அமைந்தால் $\sqrt{af}\pm\sqrt{bg}\pm\sqrt{ch}=0$ எனவும் நிறுவுக.

$$al+bm+cn=0$$

$$\therefore\quad l=\frac{-(bm+cn)}{a}$$

அடுத்த சமன்பாட்டில் இதைப் பிரதியிட்டால்,

$$fmn-(gn+hm)\frac{(bm+cn)}{a}=0$$

i.e., $bhm^2+mn(ch+bg-af)+cgn^2=0$

அதாவது $bh\left(\frac{m}{n}\right)^2+(ch+bg-af)\frac{m}{n}+cg=0$ — (1)

$\frac{m}{n}$ இல் இருபடிச் சமன்பாடாக உள்ள இதன் மூலங்கள் $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ என்க,

கோடுகள் இணையாக இருப்பின், மூலங்கள் சமமாக அமையும்

$$\therefore \ (ch+bg-af)^2 = 4\,bhcg$$

$$i.\,e.,\quad ch+bg-af = \pm 2\sqrt{bcgh}$$

$$i.\,e.,\quad ch+bg \pm 2\sqrt{bcgh} = af$$

$$i.\,e.,\quad (\sqrt{ch} \pm \sqrt{bg})^2 = (\sqrt{af}\,)^2$$

$$i.\,e.,\quad \sqrt{ch} \pm \sqrt{bg} = \mp \sqrt{af}$$

$$\therefore \quad \sqrt{af} \pm \sqrt{bg} \pm \sqrt{ch} = 0$$

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{cg}{bh}$$

$$i.\,e.,\quad \frac{m_1 m_2}{cg} = \frac{n_1 n_2}{bh}$$

$$i.\,e.,\quad \frac{m_1 m_2}{g/b} = \frac{n_1 n_2}{h/c} \quad -\ (2)$$

இதேபோல்,

$$\frac{l_1 l_2}{f/a} = \frac{m_1 m_2}{g/b} \quad -\ (3)$$

முடிவுகள் (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l_1 l_2}{f/a} = \frac{m_1 m_2}{g/b} = \frac{n_1 n_2}{h/c}$$

இரு நேர்க்கோடுகளும் செங்குத்தாக அமைந்தால்,

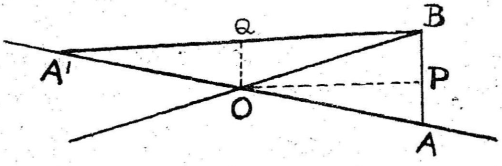
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{f}{a} + \frac{g}{b} + \frac{h}{c} = 0$$

மாதிரி 7: வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ஆகும். அவற்றின் இடையே உள்ள கோணங்களைச் சமக்கூறிடும் கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் $l_1 \pm l_2$, $m_1 \pm m_2$, $n_1 \pm n_2$ எனக் காட்டுக.

திசைக் கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) ஆக உள்ள ஆதி வழியேச் செல்லும் AA', BB' என்ற இரு நேர்க்கோடுகளை எடுத்துக் கொள்க.

$OA = OB = OA' = r$ என இருக்குமாறு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்க.



படம் 16

P உம் Q உம் முறையே AB, $A'B$ இன் நடுப்புள்ளிகள் எனில், OP, OQ ஆகிய கோடுகள் நமக்குத் தேவையான சம வெட்டிகளாகும்.

A, B, A' என்ற புள்ளிகளின் ஆய எண்கள் முறையே (l_1r, m_1r, n_1r), (l_2r, m_2r, n_2r), $(-l_1r, -m_1r, -n_1r)$ ஆவன.

ஆகவே புள்ளிகள் P, Q இன் ஆய எண்கள் முறையே

$$[\tfrac{1}{2}(l_1+l_2)\,r,\ \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)r,\ \tfrac{1}{2}(n_1+n_2)r],$$
$$[\tfrac{1}{2}(l_1-l_2)r,\ \tfrac{1}{2}(m_1-m_2)r,\ \tfrac{1}{2}(n_1-n_2)r] \text{ ஆகும்.}$$

எனவே OP இன் திசைத் தகவுகள் l_1+l_2, m_1+m_2, n_1+n_2 ஆகவும், OQ இன் திசைத் தகவுகள் l_1-l_2, m_1-m_2, n_1-n_2 ஆகவும் உள்ளன. அதாவது, சமவெட்டிகளின் திசைத்தகவுகள் $l_1 \pm l_2$, $m_1 \pm m_2$, $n_1 \pm n_2$ என்பவையே.

மாதிரி **8.** (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களெனின், $(l_1+l_2+l_3,\ m_1+m_2+m_3,\ n_1+n_2+n_3)$ ஆகிய திசைத் தகவுகளையுடைய ஒரு நேர்க்கோடு முந்தைய மூன்று கோடுகளுடனும் சமகோணங்களை உண்டாக்கும் என்று நிறுவுக.

முதல் மூன்று கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$
$$l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0$$
$$l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0$$

மேலும் $l_1^2+m_1^2+n_1^2=l_2^2+m_2^2+n_2^2=l_3^2+m_3^2+n_3^2=1$

$$\begin{aligned}(l_1+l_2+l_3)^2+(m_1+m_2+m_3)^2+(n_1+n_2+n_3)^2 &= \Sigma l_1^2+\Sigma l_2^2+\Sigma l_3^2+\\ &\quad 2\Sigma l_1l_2+2\Sigma l_2l_3+2\Sigma l_3l_1\\ &=1+1+1\\ &=3\end{aligned}$$

ஆகவே நான்காவது கோட்டின் திசைக்கொசைன்கள்

$$\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{\sqrt{3}}, \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{3}}, \frac{n_1+n_2+n_3}{\sqrt{3}}\right) \text{ ஆகும்.}$$

θ என்பது முதற்கோட்டிற்கும் நான்காவது கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணமெனில்,

$$\cos\theta = \frac{l_1(l_1+l_2+l_3)}{\sqrt{3}} + \frac{m_1(m_1+m_2+m_3)}{\sqrt{3}} + \frac{n_1(n_1+n_2+n_3)}{\sqrt{3}}$$

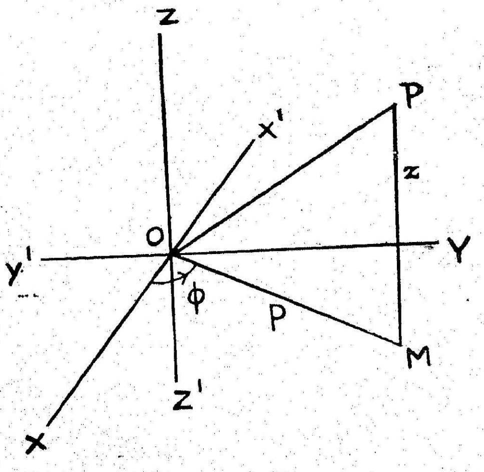
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

இதேபோல், நான்காவது கோடு மற்றிரு கோடுகளுடனும் உண்டாக்கும் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என அறியலாம்.

1·16. உருளை ஆய எண்கள் (Cylindrical Co-ordinates)

XOX', YOY', ZOZ' ஆகியவை செவ்வக ஆய அச்சுகளாகக்



படம் 17

கொள்க. P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.

$$\left.\begin{array}{l} OM=P \\ \widehat{XOM}=\varphi \\ MP=z \end{array}\right\} \text{(என்க)}$$

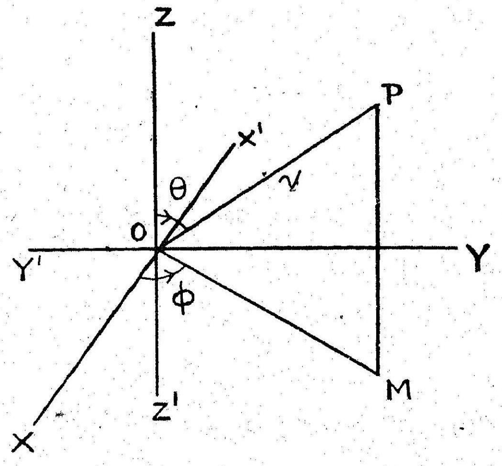
P இன் உருளை ஆய எண்கள் (l, φ, z) ஆகும்.

P க்குரிய கார்ட்டீசியன் ஆய எண்கள் (Cartesian Co-ordinates) (x, y, z) எனில், பின்வரும் தொடர்புகளை அறியலாம்.

$$\left.\begin{array}{l} x=P\ \cos\varphi \\ y=P\ \sin\varphi \\ z=z \end{array}\right\}$$

1·17. கோணத்தொலை ஆய எண்கள் (Polar Co-ordinates)

முன்போலவே XOX', YOY', ZOZ' ஆகியவை செவ்வக ஆய அச்சுகளாகக் கொள்க. P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தாக PM ஐ வரைக.



படம் 18

$$\left.\begin{array}{l} OP = r \\ \widehat{POZ} = \theta \\ \widehat{XOM}= \varphi \end{array}\right\} \text{(என்க)}$$

P இன் கோணத்தொலை ஆய எண்கள் (r, θ, φ) ஆகும்.

P க்குரிய கார்ட்டீசியன் ஆய எண்கள் (x, y, z) என்ருல், பின் வரும் தொடர்புகளை அறியலாம்.

$$x = OM \cos \varphi$$
$$y = OM \sin \varphi$$
$$z = MP$$

ஆனல் $OM = OP \sin \theta = r \sin \theta$

$MP = OP \cos \theta = r \cos \theta$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}\right\}$$

பின் வரும் அதிகாரங்களில், மேற்கண்ட இரு ஆய எண் முறைகளும் எவ்விடத்தும் பயன்படுத்தப்படவில்லை. ஆனல் இம்முறைகள் நிலையியக்கவியல் (Mechanics), வானியல் (Astronomy) போன்ற கணிதப் பிரிவுகளில் மிகவும் பயன்படுவதால், அவற்றைப் பற்றிய குறிப்பு இங்குத் தரப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 1

1. $(5, -1, 7)$, $(c, 5, 1)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 9 அலகுகளெனில், c இன் மதிப்பு என்ன?

2. ஆய அச்சுகளிலிருந்து புள்ளி P $(1, 2, 3)$ இன் தொலைவுகள் முறையே $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ எனக் காட்டுக.

3. புள்ளிகள் $(2, 3, 5)$, $(-1, 5, -1)$, $(4, -1, 2)$ என்பவை இரு சம பக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என்று நிறுவுக.

4. $(2, 6, 3)$, $(3, 2, 2)$, $(0, 5, 4)$, $(1, 1, 3)$ ஆகியவை ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகள் என்று காட்டுக.

5. புள்ளிகள் $(5, -3, 1)$, $(3, 2, 7)$ ஐச் சேர்க்கும் கோடானது ஆயத்தளங்களால் பிரிக்கப்படுகின்ற விகிதங்களைக் காண்க.

6. புள்ளிகள் $(7, -6, 1)$, $(17, -18, -3)$ ஐச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கும், $(1, 4, -5)$, $(3, -4, 11)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் மற்ருெரு கோட்டிற்கும் $(2, 0, 3)$ பொதுவான புள்ளியென்று காண்பி.

7. ஒரு நான்முகியின் எதிர் விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என்று நிறுவுக.

8. அச்சுகளின்மேல் ஒரு கோட்டின் குத்துவீழல்கள் 2, 3, 6 என்றால் அக்கோட்டின் நீளத்தையும் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க.

9. புள்ளிகள் $(-9, 4, 5)$, $(11, 0, -1)$ ஐச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் கண்டுபிடி.

10. பின்வரும் கனஉருவங்களில் எவையேனும் இரு மூலை விட்டங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடு:

(i) கனசதுரம் (ii) a, b, c என்ற விளிம்புகளையுடைய செவ்வகத் துண்டு.

11. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $(1, 0, -1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 2, 1)$ என்றால், அதன் கோணங்கள் யாவை ?

12. $A\ (3, 4, 5)$, $B\ (4, 6, 3)$, $C\ (-1, 2, 4)$, $D\ (1, 0, 5)$ என்ற புள்ளிகள் தரப்பட்டுள்ள. (i) CD இன் மேல் AB இன் குத்து வீழல் (ii) AB இன்மேல் CD இன் குத்து வீழல் ஆகியவற்றைக் கணக்கிடு.

13. ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு கன சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களோடு $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ என்ற கோணங்களை உண்டாக்கினால், $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$ என்று காட்டுக.

14. திசைக் கொசைன்கள் முறையே (l, m, n), (l', m', n') உடைய இரு நேர்க்கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக அமைந்த கோட்டின் திசைக் தகவுகள் $(mn' - m'n, nl' - n'l, lm' - l'm)$ என நிறுவுக.

15. இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $2l + 2m + n = 0$, $3l^2 + 5m^2 - 5n^2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்பட்டால், அக்கோடுகள் செங்குத்தாக அமையும் என்று காண்பி.

16. இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $al + bm + cn = 0$, $ul^2 + vm^2 + wn^2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளி

லிருந்து கிடைத்தால், $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}=0$ அல்லது $a^2(v+w)+b^2(w+u)+c^2(u+v)=0$ என்பதற்கு ஏற்ற வாறு, அக் கோடுகள் இணையாகவோ அல்லது செங்குத் தாகவோ அமையும் என்று காட்டுக.

17. இரு நேர்க்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் $l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$ என்ற சமன்பாடுகளால் தரப்பட்டால், அக் கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ அல்லது $\frac{2\pi}{3}$ என்று நிறுவுக.

18. மூன்று சந்திக்கும் கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) ஆவன. அவை ஒரு தளத்தில் அமைய வேண்டுமென்றால்,

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0$$ என்று நிரூபி.

2. தளம்

(Plane)

ஒருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு (general equation of first degree).

பகுமுறை வடிவ கணிதத்தில் ஒவ்வொரு சமன்பாடும் ஓர் இயங்குவரையை (locus)க் குறிக்கும் என்பதை அறிவோம். மறுதலையாக, ஒவ்வோர் இயங்குவரைக்கும் ஒரு சமன்பாடு உண்டு என்றும் தெரிகிறது. x, y, z ஆகிய மாறிகளில் ஒருபடிச் சமன்பாடு என்ன இயங்குவரையைக் குறிக்கின்றது என்று ஆராய்வோம்.

இச்சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $Ax+By+Cz+D=0$ ஆகும். இதில் A, B, C, D மெய்யெண்களாகவும், A, B, C என்பவை ஒருங்கே பூச்சியத்திற்குச் சமமற்றதாகவும் தரப்பட்டுள்ளன. A, B, C ஆகியவை ஒருங்கே பூச்சியமல்ல என்ற நிபந்தனை, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ என்பதற்குச் சமமாகும். இந்தச் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் இயங்குவரை ஒரு தளமென்று காட்டலாம். முதலாவதாக தளத்தின் வடிவ கணித வரையறையை இங்குத் தருவோம்.

“ஓர் இயங்குவரையில் P, Q என்ற எவையேனும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மேல் அமையும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் அந்த இயங்குவரையில் அமைந்தால், அது தளம் எனப்படும்.”

2·1. x, y, z இல் முதற்படிச் சமன்பாடு ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது.

சமன்பாட்டை $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2 \neq 0)$ எனக் கொள்க.

புள்ளிகள் $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, இச்சமன்பாடு குறிக்கும் இயங்குவரையில் அமைவதாகக் கொள்வோம்.

ஆகவே $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ ——— (i)

$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$ ——— (ii)

(i)$+k\times$(ii) தருவது

$$A(x_1+kx_2)+B(y_1+ky_2)+C(z_1+kz_2)+D(1+k)=0$$

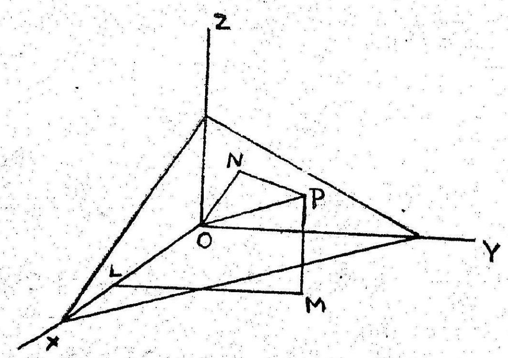
i. e., $$A\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)+B\left(\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)+C\left(\frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)+D=0 \quad \text{— (iii)}$$

தொடர்பு (iii) இலிருந்து k இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $(k\neq-1)$, புள்ளி $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ இந்த இயங்கு வரையில் அமைகிறது என்பதை அறியலாம்.

PQ இல் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் ஆய எண்களை $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \frac{z_1+zk_2}{1+k}\right)$ இல் k விற்குப் பல மதிப்புக்கள் கொடுத்து அறியலாம்.

இவ்விதமாக இயங்குவரையில் எவையேனும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மேல் அமையும் புள்ளியும் இயங்குவரையில் அமைகின்றது. வரையறையின்படி, இந்த இயங்குவரை ஒரு தள மாகும். எனவே, x, y, z இல் முதற் படியில் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாடும் ஒரு தளத்தையே குறிக்கின்றது.

2·2. ஒரு தளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளம் p ஆகவும், அதன் திசைக்கொசைன்கள் ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) ஆகவும் கொடுக்கப்பட்டால் தளத்தின் சமன்பாட்டை அறிதல்



படம் 19

O இலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடு ON எனக் கொள்க. $P(x, y, z)$ என்ற ஏதேனுமொரு புள்ளியைத் தளத்தில்

எடுத்துக்கொண்டு, XOY தளத்திற்கு PM செங்குத்தாகவும், x அச்சுக்கு ML செங்குத்தாகவும் வரைக

$OL=x$; $LM=y$; $MP=z$

$\widehat{ONP}=90°$

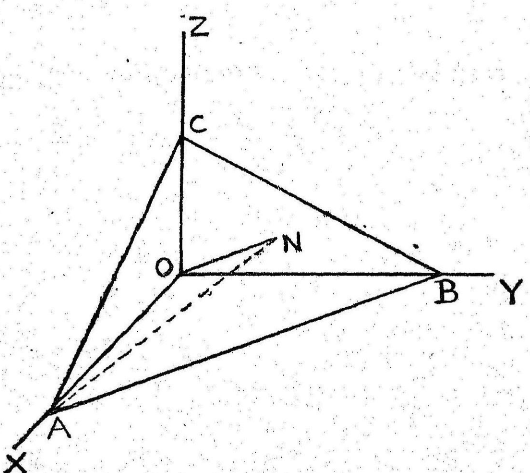
$\therefore ON=$ செங்கோட்டின் மேல் OP இன் குத்து வீழல்
$=$ செங்கோட்டின் மேல் OL, LM, MP ஆகிய கோட்டுத் துண்டுகளின் குத்து வீழல்களின் கூடுதல்

அதாவது $p=x \cos \alpha+y \cos \beta+z \cos \gamma$

எனவே, தளத்தின் சமன்பாடு $x \cos \alpha+y \cos \beta+z \cos \gamma=p$ ஆகும்.

குறிப்பு: தளத்தின் சமன்பாடு $Ax+By+Cz+D=0$ என்ற பொது வடிவத்தில் அமைந்தால், ஏதாகிலுமொரு புள்ளியிலிருந்து இத்தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (A, B, C) ஆகும். அதாவது சமன்பாட்டில் x, y, z இன் கெழுக்கள் செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களுக்கு விகிதப் பொருத்த முடையனவாக அமையும்.

2·3. அச்சுகளின் மேல் கொடுக்கப்பட்ட வெட்டுத் துண்டுகளை உண்டாக்கும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல்



படம் 20

ஆய அச்சுகளைத் தளம், A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

$OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ எனக் கொள்க.

O இலிருந்து தளத்திற்கு ON என்ற செங்குத்துக் கோட்டை வரைக.

$ON=p$ எனவும், ON, அச்சுகளோடு உண்டாக்கும் கோணங்கள் α, β, γ எனவுங் கொள்க.

$ON \perp AN$; $A\hat{O}N=\alpha$

$\therefore \quad ON=OA \cos\alpha$

i.e., $p=a\cos\alpha$

i.e., $\cos\alpha=\dfrac{p}{a}$

இதேபோல் $\cos\beta=\dfrac{p}{b}$; $\cos\gamma=\dfrac{p}{c}$

உட்பிரிவு 2·2 இன்படி, தளத்தின் சமன்பாடு

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

$$x.\frac{p}{a}+y.\frac{p}{b}+z.\frac{p}{c}=p$$

$p\neq 0$ என்பதால்; தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ ஆகும்.}$$

2·4. ஒரு தளத்தின் சமன்பாட்டைச் செங்கோட்டு வடிவத்திற்கு (normal form) மாற்றுதல்

தளத்தின் சமன்பாடு $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ எனக் கொள்க.

செங்கோட்டு வடிவத்தில் தளத்தின் சமன்பாடு

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \text{ ஆகும்.}$$

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால், இவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\therefore \quad \frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\cos\beta}=\frac{C}{\cos\gamma}=\frac{D}{-p}=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

i.e., $\dfrac{D}{p}=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

மரபின்படி, p எப்போதும் நேராகக் கொள்ளப்படுவதால், D இன் குறியைப் பொருத்து மூலத்தின் குறியை நேராகவோ அல்லது எதிராகவோ கொள்ளலாம்.

எனவே, D நேராக இருக்குமெனில்,

$$\cos\alpha = \frac{-A}{\sqrt{\Sigma A^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-B}{\sqrt{\Sigma A^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-C}{\sqrt{\Sigma A^2}}; \quad p = \frac{D}{\sqrt{\Sigma A^2}}$$

D எதிராக இருக்குமெனில்,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{\Sigma A^2}}; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{\Sigma A^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{\Sigma A^2}}; \quad p = \frac{-D}{\sqrt{\Sigma A^2}}$$

2·5. இரு தளங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தைக் காணல்

இரு தளங்களின் சமன்பாடுகள்

$ax+by+cz+d=0$, $a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1=0$ என்க. இவற்றிற்கு ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) ஆகுக.

தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்றால், செங்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணமும் θ ஆக இருக்கும்.

$$\text{ஆகவே } \cos\theta = \frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{(\Sigma a^2)(\Sigma a_1^2)}}$$

துணை முடிவு (Corollary)

இரு தளங்களும் இணையாக இருப்பின், (a, b, c); (a_1, b_1, c_1) ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டின் திசைத் தகவுகளாகும்.

$$\text{ஆகவே, } \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

இரு தளங்களும் செங்குத்தாக இருந்தால்,

$a\,a_1+b\,b_1+c\,c_1=0$.

2·6. ஒரு கோட்டிலமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காணல்

கொடுத்த புள்ளிகளை (x_1, y_1, z_1) ; (x_2, y_2, z_2) ; (x_3, y_3, z_3) எனக் கொள்க.

தளத்தின் சமன்பாடு $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ என்க.———(i)

நு புள்ளிகளும் தளத்தின் மேல் அமைவதால்,

$$a\,x_1+b\,y_1+c\,z_1+d=0 \text{———} \textbf{(ii)}$$
$$a\,x_2+b\,y_2+c\,z_2+d=0 \text{———} \textbf{(iii)}$$
$$a\,x_3+b\,y_3+c\,z_3+d=0 \text{———} \textbf{(iv)}$$

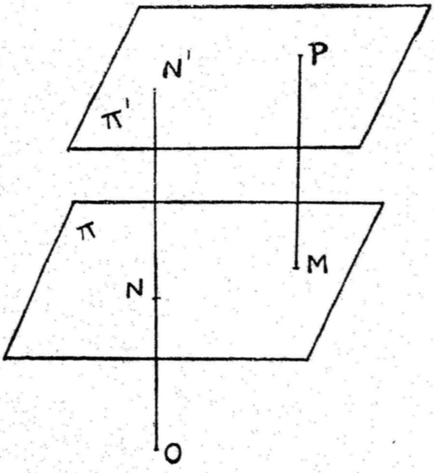
இந்த நான்கு தொடர்களிலிருந்தும் a, b, c, d என்பனவற்றை நீக்குக.

ஆகவே தளத்தின் சமன்பாடு பின்வரும் அணிக்கோவை வடிவத்தில் தரப்படுகின்றது.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2·7. ஒரு தளத்திலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் தொலையைக் கணக்கிடுதல்

கொடுத்த புள்ளியை $P\,(x_1, y_1, z_1)$ எனவும், தளத்தை π எனவும் கொள்க.



படம் 21

P இன் வழியாக π க்கு இணையாக வரையப்
' என்க,

π இன் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p \text{ ——— (i)}$$

π' இன் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p' \text{ —— (ii)}$$

O ஆதியெனில், படத்தில் தளங்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு செங்கோடுகளின் வேற்றுமைக்குச் சமமாகும்.

P இலிருந்து π க்கு வரையப்பட்ட செங்கோடு PM என்றால்,

$PM = ON' - ON = p' - p$

தளம் π', புள்ளி P இன் வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = p' \text{ ——— (iii)}$$

$$\therefore \quad PM = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p$$

இதுவே தேவையான செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமாகும். கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியும், ஆதியும் தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்தால், இந்த நீளம் எதிராகக் கொள்ளப்படுகிறது. அவை தளத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில் அமைந்தால், இந்த நீளம் நேராகக் கொள்ளப்படுகிறது.

துணை முடிவு

தளத்தின் சமன்பாடு $ax + by + cz + d = 0$ என்ற பொது வடிவத்தில் தரப்படுமானால், உட்பிரிவு 2·4 இன்படி,

$$\cos \alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{\Sigma a^2}}; \quad \cos \beta = \frac{\pm b}{\sqrt{\Sigma a^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{\pm c}{\sqrt{\Sigma a^2}}; \quad p = \frac{\mp d}{\sqrt{\Sigma a^2}}$$

$\therefore$ தேவையான செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

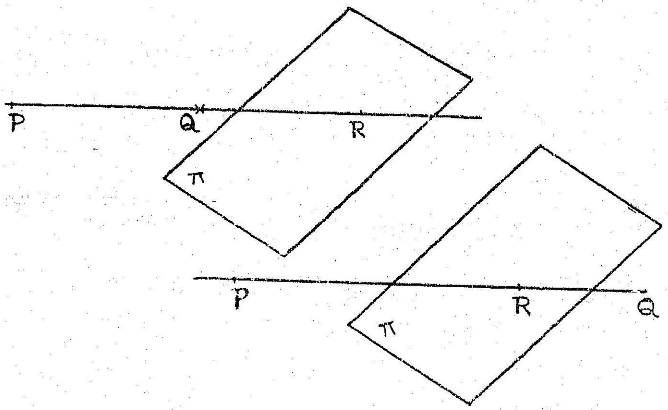
$$= \frac{\pm (ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

d நேராகவோ, எதிராகவோ இருப்பதைப் பொருத்து மூலக்குறி எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

2·8. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடு ஒரு தளத்தால் பிரிக்கப்படும் விகிதத்தை அறிதல்

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளாகவும் $ax + by + cz + d = 0$ தளத்தின் சமன்பாடாகவும் கொள்க,

PQ தளத்தை *R* இல் சந்திக்கட்டும். *PQ* ஐ, புள்ளி *R*, $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம் 22

R இன் ஆய எண்கள் $\dfrac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}$, $\dfrac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}$, $\dfrac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}$ ஆவன.

R தளத்தில் அமைவதால்,

$$a\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+c\left(\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)+d=0$$

i.e., $\lambda\,(ax_2+by_2+cz_2+d)+(ax_1+by_1+cz_1+d)=0$

அதாவது, $\lambda = -\dfrac{ax_1+by_1+cz_1+d}{ax_2+by_2+cz_2+d}$

P, *Q* தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் இருந்தால், *PQ* ஐ *R* புறம்பாகப் பிரிக்கின்றது. ஆகவே, விகிதம் எதிர்க்குறியோடு இருக்கும். இதன் காரணமாகக் கோவைகள் $ax_1+by_1+cz_1+d$, $ax_2+by_2+cz_2+d$ ஒரே குறியை உடையனவாக அமைகின்றன.

P, *Q* தளத்தின் எதிர்ப் பக்கங்களில் இருந்தால், *PQ* ஐ *R* உள்ளாகப் பிரிக்கின்றது. எனவே, விகிதம் நேர்க்குறியோடு இருக்கும். இதன் காரணமாகக் கோவைகள் $ax_1+by_1+cz_1+d$, $ax_2+by_2+cz_2+d$ மாறுபட்ட குறிகளையுடையனவாக அமைகின்றன.

2·9. இரு தளங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை இரு சமக் கூறிடும் தளங்களைக் காணல்

தளங்களின் சமன்பாடுகளை

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

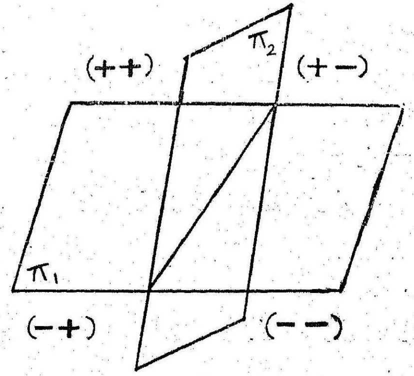
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$ எனக் கொள்க.

$P(x, y, z)$ கோணச் சமவெட்டியின்மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளி என்க. தளங்களை π_1, π_2 எனக் குறிப்பிடுக.

இந்த இரு தளங்களும் வெளியை நான்கு பாகங்களாகப் பிரிக்கின்றன.

ஒவ்வொரு பாகத்திலும் தளத்தின் நேரான பக்கத்திற்கோ அல்லது எதிரான பக்கத்திற்கோ தகுந்தவாறு குறிகள் தரப்பட்டுள்ளன.

P கோணச் சமவெட்டியின்மேல் அமையுமெனில், அதிலிருந்து தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் சமமாக இருக்கும்.



படம் 23

$(+\,+)$, $(-\,-)$ ஆகிய பாகங்களில் P அமைந்தால், கோவைகள் $a_1x + b_1y + c_1z + d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரே குறி அமையும்.

ஆகவே $(+\,+)$, $(-\,-)$ என்ற பாகங்களில் அமையும் கோணச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

அவ்வாறே, (+ −) அல்லது (− +) பகுதியில் உள்ள கோணச் சமவெட்டியின் மேல் P அமையுமெனில், கோவைகளின் குறிகள் மாறுபட்டவையாக இருக்கும்.

ஆகவே, இப்பகுதிகளில் அமைந்த சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = -\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

ஆகவே, இரு கோணச் சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

2·10. முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காணல்

முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ எனவும், அதன் பரப்பளவு $\triangle$ எனவுங் கொள்க. ஆயத்தளங்களுக்கும் முக்கோணத்தின் தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள கோணங்கள் முறையே α, β, γ என்க.

YOZ தளத்தின் மேல் A, B, C இன் குத்து வீழல்கள் முறையே $A_1(0, y_1, z_1)$, $B_1(0, y_2, z_2)$, $C_1(0, y_3, z_3)$ ஆகும்.

$\triangle\ A_1B_1C_1$ இன் பரப்பளவு $\triangle_1$ என்றால்,

$$\triangle_1 = \triangle \cos\alpha$$

அதேபோல, $\triangle_2 = \triangle\cos\beta$; $\triangle_3 = \triangle\cos\gamma$

ஆயத்தளங்கள் ZOX, XOY இன் மேல் $\triangle\ ABC$ இன் குத்து வீழல்கள் $\triangle_2$, $\triangle_3$ ஆவன.

$$\triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2 = \triangle^2\ (\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

தளம் ABC க்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்பதால்,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$$

$$\therefore\ \triangle^2 = \triangle_1^2+\triangle_2^2+\triangle_3^2 \text{———(i)}$$

தள வடிவகணிதத்தில் நன்கு தெரிந்த முடிவின்படி,

$$2\triangle_1 = \pm\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix};\quad 2\triangle_2 = \pm\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$2\triangle_3 = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

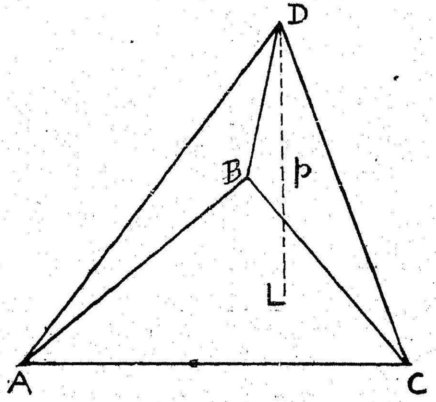
இந்தக் கோவைகள் நேராக இருக்கும்படியாகக் குறிகள் தெரிந்து கொள்ளப்படுகின்றன.

இவற்றை முடிவு (i) இல் பிரதியிட; முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பின்வரும் தொடர்பிலிருந்து கிடைக்கின்றது.

$$\triangle^2 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_3 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

2·11. நான்முகியின் கன அளவைக் கணக்கிடுதல்

நான்முகியின் கன அளவு V எனவும் அதன் உச்சிகள் $A\ (x_1, y_1, z_1)$, $B\ (x_2, y_2, z_2)$, $C\ (x_3, y_3, z_3)$, $D\ (x_4, y_4, z_4)$ எனவும் கொள்க.



படம் 24

தளம் ABC க்குச் செங்கோடு DL வரைக.

$\triangle\ ABC$ இன் பரப்பளவு $\triangle$ என்றால்,

$V = \frac{1}{3} p \triangle$ (இதில் $DL = p$)

தளம் ABC இன் சமன்பாடு $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ என்பதே.

இந்த அணிக்கோவையின் முதல் நிரை (row)யில் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு இதை விரித்தால்,

$$x \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

இந்தச் சமன்பாட்டில் வரும் கெழுக்கள் முறையே $2\,\triangle_1$, $2\,\triangle_2$, $2\,\triangle_3$ ஆவன.

ஆகவே, $$p = \pm \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \div 2\sqrt{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \div 2\,\triangle$$

ஆகவே,

$$V = \pm \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

இந்தக் கோவை நேராக இருக்கும்படியாகக் குறி தெரிந்து கொள்ளப்படுகிறது. D ஆதியோடு ஒன்றுபடுமெனில், $x_4 = y_4 = z_4 = 0$.

ஆகவே,

$$V = \pm \tfrac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2·12. x, y, z இல் சமப்படித்தான இருபடிச் சமன்பாடு இருதளங்களைக் குறிக்க நிபந்தனை காணல்

கொடுத்த சமன்பாடு $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ (என்க.)

இரு தளங்களின் சமன்பாடுகள் $lx + my + nz = 0$; $l_1x + m_1y + n_1z = 0$ எனக் கொள்க.

ஆகவே, $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \equiv (lx + my + nz)(l_1x + m_1y + n_1z)$.

கெழுக்களை ஒப்பிடுகையில் கிடைப்பது

$$\begin{array}{r|l} l\,l_1 = a & m\,n_1 + m_1\,n = 2f \\ m\,m_1 = b & n\,l_1 + n_1\,l = 2g \\ n\,n_1 = c & l\,m_1 + l_1\,m = 2h \end{array}$$

மேலும் $$\begin{vmatrix} l & l_1 & 0 \\ m & m_1 & 0 \\ n & n_1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & l & 0 \\ m_1 & m & 0 \\ n_1 & n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது $$\begin{vmatrix} 2\,ll_1 & lm_1+l_1m & ln_1+l_1n \\ ml_1+m_1l & 2\,mm_1 & mn_1+m_1n \\ nl_1+n_1l & nm_1+n_1m & 2\,nn_1 \end{vmatrix} = 0$$

i. e., $$\begin{vmatrix} 2a & 2h & 2g \\ 2h & 2b & 2f \\ 2g & 2f & 2c \end{vmatrix} = 0$$

i. e., $$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

அதாவது, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

துணை முடிவு

சமப்படித்தான இருபடிச் சமன்பாட்டினால் தரப்படும் இரு தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் குறிப்போம்.

தளங்களின் தனித்த சமன்பாடுகள் $lx + my + nz = 0$, $l_1x + m_1y + n_1z = 0$ என்க.

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(mn_1-m_1n)^2+(l_1n-ln_1)^2+(l_1m-lm_1)^2}}{ll_1+mm_1+nn_1}$$

$$= \frac{\sqrt{\{(mn_1+m_1n)^2-4\,mm_1\,nn_1\}+\ldots\ldots\ldots\ldots}}{ll_1+mm_1+nn_1}$$

$$= \frac{\sqrt{(4f^2-4bc)+(4g^2-4ca)+(4h^2-4ab)}}{a+b+c}$$

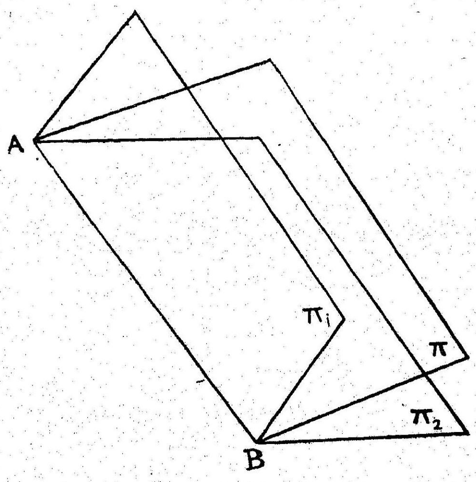
$$= \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab}}{a+b+c}$$

தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்தால், $\theta = 90^\circ$

$$\therefore \quad \tan\theta = \infty$$

$$\therefore \quad a+b+c=0$$

2·13. இருதளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல்



படம் 25

π_1, π_2 கொடுத்த தளங்கள் என்க. அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$U \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ——— (i)

$V \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ——— (ii) ஆகுக.

π_1, π_2 ஆகியவை AB இல் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன.

பின்வரும் சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$U+\lambda V=0$————(iii)

(இதில் λ யாதானுமொரு மாறிலி)

மூன்றுவது சமன்பாடு பின்வருமாறு எழுதப்படுகின்றது.

$$(a_1+\lambda a_2)x+(b_1+\lambda b_2)y+(c_1+\lambda c_2)z+(d_1+\lambda d_2)=0$$

இது x, y, z இல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், ஒரு தளத்தைக் குறிக்கும்.

முதலிரண்டு சமன்பாடுகளில் பொருந்தும் x, y, z இன் மதிப்புகள் மூன்றுவது சமன்பாட்டிலும் பொருந்துகின்றன என்பதை எளிதாக அறியலாம். ஆகவே, கொடுத்த தளங்கள் இரண்டிற்கும் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகள் மூன்றுவது தளத்திலும் அமைகின்றன என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது, மூன்றுவது தளமும் AB இன் வழியாகச் செல்லுமென்பது புலனுகும்.

எனவே, $U+\lambda V=0$ என்ற சமன்பாடு, λ இன் பல மதிப்புகளுக்கு, AB இன் வழியாகச் செல்லும் எல்லாத் தளங்களையும் குறிக்குமென்பதை அறிகின்றோம்.

மாதிரி 1: புள்ளி (1, 2, 3) வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம் அச்சுகளின்மேல் சமமான வெட்டுத் துண்டுகளை உண்டாக்குமெனில், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தளத்தின் சமன்பாட்டை $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ எனக் கொள்க.

வெட்டுத் துண்டுகள் சமமாக இருப்பதால், $a=b=c$

ஆகவே, $x+y+z=a$

புள்ளி (1, 2, 3) வழியாகத் தளம் செல்லுவதால்,

$1+2+3=a$

$\therefore \quad a=6$

ஆகவே தளத்தின் சமன்பாடு $x+y+z=6$ ஆகும்.

மாதிரி 2: பின்வரும் தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க: $x-y+2z-9=0$; $2x+y+z=7$.

இத்தளங்களுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் $(1, -1, 2)$, $(2, 1, 1)$ ஆகும்.

தளங்களுக்கு இடையே உள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\cos\theta = \frac{2+(-1)+2}{\sqrt{(1+1+4)(4+1+1)}} = \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

மாதிரி 3 : புள்ளிகள் $(2, -3, 1)$, $(-1, 1, -7)$ வழி, $x-2y+5z+1=0$ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz+d=0$ எனக் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்கு இது செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$a-2b+5c=0 \text{———} (i)$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் இத்தளத்தில் அமைவதால்,

$$2a-3b+c+d=0 \text{———} (ii)$$

$$-a+b-7c+d=0 \text{———} (iii)$$

(ii)−(iii) தருவது

$$3a-4b+8c=0 \text{———} (iv)$$

முடிவுகள் (i), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{7} = \frac{c}{2} = \frac{a-b+7c}{4-7+14} = \frac{d}{11}$$

ஆகவே தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$4x+7y+2z+11=0 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 4 : தளங்கள் $3x+4y-5z+1=0$, $5x+12y-13z=0$ ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள விரிகோணத்தை, தளம் $14x-8y+13=0$ இருசமக் கூறிடும் என்று காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் இடையே உள்ள கோணங்களை இருசமக் கூறிடும் தளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{3x+4y-5z+1}{\sqrt{50}} = \pm \frac{5x+12y-13z}{\sqrt{338}}$$

அதாவது, $$\frac{3x+4y-5z+1}{5\sqrt{2}} = \pm \frac{5x+12y-13z}{13\sqrt{2}}$$

i. e., $14x - 8y + 13 = 0$ அல்லது $64x + 112y - 130z + 13 = 0$. ஆகவே, தளம் $14x - 8y + 13 = 0$ கோணச் சமவெட்டிகளில் ஒன்றாகும். இது கொடுத்த தளங்களுக்கிடையே உள்ள விரி கோணத்தை இருசமக் கூறிடுகின்றது என்பதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

தளங்கள் $14x - 8y + 13 = 0$, $3x + 4y - 5z + 1 = 0$ ஆகிய வற்றினிடையே உள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடிப்போம்.

இவற்றிற்குரிய செங்கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் $(14, -8, 0)$, $(3, 4, -5)$ ஆவன.

ஆகவே, இத் தளங்களிடையே உள்ள கோணம்

$$= \cos^{-1}\left(\frac{42-32}{\sqrt{(14^2+8^2)(3^2+4^2+5^2)}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{260 \times 50}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{130}} > \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

அதாவது, இத்தளங்களிடையே உள்ள கோணம் $> 45^\circ$

ஆகவே கொடுத்த தளம் இரு தளங்களிடையே உள்ள விரி கோணத்தை இருசமக் கூறிடுகின்றது.

மாதிரி **5 :** தளங்கள் $2x - y = 0$, $3z - y = 0$ வெட்டிக் கொள்ளும் கோடு வழி, தளம் $4x + 5y - 3z = 8$ க்குச் செங்குத் தாக அமைந்த தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$(2x - y) + \lambda(3z - y) = 0$ என்ற வடிவத்தில் உள்ளது.

i. e., $2x - (1 + \lambda)y + 3\lambda z = 0$

இத்தளம் கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைவதால்,

$2 \cdot 4 - (1 + \lambda)5 + 3\lambda(-3) = 0$

i. e., $14\lambda = 3$

$\therefore \lambda = \dfrac{3}{14}$

4

ஆகவே தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$(2x-y)+\frac{3}{14}(3z-y)=0$$

$i.\ e.,\ 28x-17y+9z=0$

மாதிரி 6 : ஒரு தளம் அச்சுகளின்மேல் a, b, c என்ற வெட்டுத் துண்டுகளை ஏற்படுத்துகின்றது. அது ஆதியிலிருந்து p என்ற தொலைவில் அமைந்தால், $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$ எனக் காட்டுக.

தளத்தின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ஆகும்.

இதைச் செங்கோட்டு வடிவத்திலும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

அதாவது, $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\therefore\ \frac{1/a}{\cos\alpha}=\frac{1/b}{\cos\beta}=\frac{1/c}{\cos\gamma}=\frac{1}{p}$$

இவற்றிலிருந்து, $\cos\alpha=\frac{p}{a};\ \cos\beta=\frac{p}{b};\ \cos\gamma=\frac{p}{c}$ எனக் கிடைக்கிறது. இவற்றை வர்க்கப்படுத்திக் கூட்டுக.

$$1=\frac{p^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

மாதிரி 7 : சமன்பாடு $x^2+y^2+4z^2+4yz+4zx+2xy+7(x+y+2z)+12=0$ இரு இணைத் தளங்களைக் குறிக்கின்றது என நிரூபித்து, அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் கணக்கிடு.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$(x+y+2z)^2+7(x+y+2z)+12=0$

$\lambda=x+y+2z$ எனப் பிரதியிடுக.

சமன்பாடு $\lambda^2+7\lambda+12=0$ என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றது.

அதாவது, $(\lambda+4)(\lambda+3)=0$

$i.e.,\ \lambda=-4;\ -3$

ஆகவே தளங்களின் வெவ்வேறான சமன்பாடுகள்

$x+y+2z+4=0$, $x+y+2z+3=0$ என்பவையே. எனவே இவை இரு இணைத் தளங்களைக் குறிக்கின்றன.

இவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவு = ஆதியிலிருந்து தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோட்டு நீளங்களின் வேற்றுமை

$$= \frac{4}{\sqrt{1+1+4}} - \frac{3}{\sqrt{1+1+4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}$$

308475

மாதிரி **8 :** நிலைத்த புள்ளி (a, b, c) வழியாகச் செல்லும் ஒரு மாறுந்தளம் ஆய அச்சுகளை A, B, C இல் சந்திக்கின்றது. A, B, C வழியாக ஆயத்தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்படும் தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$ என நிறுவுக.

தளம் ABC இன் சமன்பாடு $\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}+\frac{z}{OC}=1$ (O ஆதியாகும்.)

இத்தளம் புள்ளி (a, b, c) வழியாகச் செல்லுவதால்,

$$\frac{a}{OA}+\frac{b}{OB}+\frac{c}{OC}=1 \quad \text{——(i)}$$

516.3
RAJ;3

புள்ளிகள் A, B, C வழியாக ஆயத்தளங்களுக்கு இணையாக அமைந்த தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியை $P(x_1, y_1, z_1)$ என்க.

YOZ தளத்திற்கு இணையாக A வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $x=OA$

இது P வழியாகச் செல்லுவதால், $x_1=OA$

இவ்வாறே, $y_1=OB$; $z_1=OC$

இவற்றைத் தொடர்பு (i) இல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{a}{x_1}+\frac{b}{y_1}+\frac{c}{z_1}=1$$

ஆகவே, P இன் இயங்குவரை $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$ ஆகும்.

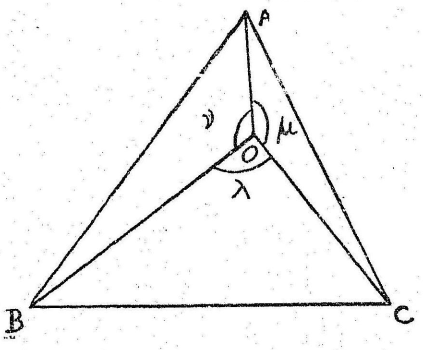
மாதிரி 9: ஒரு நான்முகியில் ஓர் உச்சியில் சந்திக்கும் மூன்று விளிம்புகளின் நீளங்கள், அவை ஒன்றுக்கொன்று பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் ஆகியவற்றில் நான்முகியின் கன அளவைக் கணக்கிடு.

$OABC$ என்ற நான்முகியில்,

$OA=a,\ OB=b,\ OC=c$ எனவும்,

$B\hat{O}C=\lambda,\ C\hat{O}A=\mu,\ A\hat{O}B=\gamma$ எனவுங் கொள்க.

O ஐ ஆதியாகவும், அதன் வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான எவையேனும் மூன்று கோடுகளை ஆய அச்சுகளாகவும் கொள்க.



படம் 26

OA, OB, OC இன் திசைக் கொசைன்களை முறையே (l_1, m_1, n_1); (l_2, m_2, n_2); (l_3, m_3, n_3) எனக் கொள்க.

இவ்விதமாக A, B, C இன் ஆய எண்கள் முறையே $(l_1a,\ m_1a,\ n_1a)$, $(l_2b,\ m_2b,\ n_2b)$, $(l_3c,\ m_3c,\ n_3c)$ ஆகும்.

ஆகவே, நான்முகியின் கன அளவு $=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} l_1a & m_1a & n_1a \\ l_2b & m_2b & n_2b \\ l_3c & m_3c & n_3c \end{vmatrix}$

$$=\frac{abc}{6}\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

பின்வரும் அணிக் கோவைப் பெருக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma l_1^2 & \Sigma l_1 l_2 & \Sigma l_1 l_3 \\ \Sigma l_1 l_2 & \Sigma l_2^2 & \Sigma l_2 l_3 \\ \Sigma l_3 l_1 & \Sigma l_3 l_2 & \Sigma l_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\mu \\ \cos\gamma & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ நான்முகியின் கன அளவு $= \dfrac{1}{6}\, abc \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\mu \\ \cos\gamma & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$

மாதிரி **10**: ஒரு நான்முகியின் முகங்கள் $a_r\, x + b_r\, y + c_r\, z + d_r = 0$ $(r = 1, 2, 3, 4)$ என்றால், அதன் கன அளவு

$$\frac{\Delta^3}{6 D_1\, D_2\, D_3\, D_4}$$ என நிறுவுக. இதில்

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

D_1, D_2, D_3, D_4 ஆகியவை இந்த அணிக்கோவையில் முறையே d_1, d_2, d_3, d_4 இன் இணைக் காரணிகளாகும் (co-factors).

$A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, $C\,(x_3, y_3, z_3)$, $D\,(x_4, y_4, z_4)$ நான்முகியின் உச்சிகளாகக் கொள்க.

$a_r\, x + b_r\, y + c_r\, z + d_r = 0$ $(r = 2, 3, 4)$ என்ற தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளி A ஆகவும், இதுபோல மற்றப் புள்ளிகளையும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$a_1\, x_1 + b_1\, y_1 + c_1\, z_1 + d_1 = k_1 \qquad \text{(என்க)}$$

i.e., $a_1\, x_1 + b_1\, y_1 + c_1\, z_1 + (d_1 - k_1) = 0$ ——— (i)

$a_2\, x_1 + b_2\, y_1 + c_2\, z_1 + d_2 = 0$ ——— (ii)

$a_3\, x_1 + b_3\, y_1 + c_3\, z_1 + d_3 = 0$ ——— (iii)

$a_4\, x_1 + b_4\, y_1 + c_4\, z_1 + d_4 = 0$ ——— (iv)

x_1, y_1, z_1 என்பவைகளை இந்நான்கு தொடர்புகளிலிருந்து நீக்க,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1-k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

இதிலிருந்து $\Delta + K_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

அதாவது, $\Delta - K_1 D_1 = 0$

$$\therefore K_1 = \frac{\Delta}{D_1}.$$

இதேபோல

$$a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 + d_2 = K_2 = \frac{\Delta}{D_2}$$

$$a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 + d_3 = K_3 = \frac{\Delta}{D_3}$$

$$a_4 x_4 + b_4 y_4 + c_4 y_4 + d_4 = K_4 = \frac{\Delta}{D_4}$$

மேலும்

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= k_1 k_2 k_3 k_4$$

நான்முகியின் கன அளவு V எனில்,

$$\Delta \times 6V = \frac{\Delta^4}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

$$\therefore V = \frac{\Delta^3}{6D_1 D_2 D_3 D_4}$$

பயிற்சி 2

1. தளம் $4x+3y-2z+12=0$, அச்சுகளின் மேல் உண்டாக்கும் துண்டுகளைக் கண்டுபிடி.

2. ஆதியிலிருந்து தளம் $6x-3y+2z-14=0$ க்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளத்தையும் திசைக் கொசைன்களையும் காண்க.

3. புள்ளி $(0, 4, -3)$ வழியாகச் செல்லும் தளம் $3x-4y+7z+3=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக அமைந்தால், அதன் சமன்பாடு யாது?

4. புள்ளிகள் $(0, -1, -1)$, $(4, 5, 1)$, $(3, 9, 4)$, $(-4, 4, 4)$ ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன என்று நிரூபி.

5. புள்ளி $(-1, 2, 3)$ வழியாகச் செல்லும் தளம், புள்ளிகள் $(-4, -2, 5)$; $(-2, 1, 1)$ ஐச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையுமெனில், அதன் சமன்பாடு என்ன?

6. தளங்கள் $x+2y+2z-4=0$, $2x+y-z+5=0$ வெட்டிக் கொள்ளும் நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளம் $4x+5y-3z=8$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமானால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. புள்ளிகள் $(0, 4, -3)$, $(6, -4, 3)$ வழியாகச் செல்லும் தளம் அச்சுகளின் மேல் பிறப்பிக்கும் துண்டுகளின் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமமென்றால், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

8. ஆதியிலிருந்து p என்ற மாறாத தொலைவிலுள்ள ஒரு மாறுந்தளம் ஆய அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்தால் $OABC$ என்ற நான்முகியின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி (Centroid), மேற்பரப்பு $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=16p^{-2}$ இல் அமையுமென நிறுவுக.

9. ஒரே ஆதியையுடைய இருவகைச் செவ்வக அச்சுகளை ஒரு தளம் ஆதியிலிருந்து a, b, c; a', b', c' என்ற தொலைவுகளில் சந்தித்தால்,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$ எனக் காட்டுக.

10. அச்சுகளை A, B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டும் ஒரு மாறுந்தளம் ஆதியிலிருந்து $3p$ எனும் மாறுத தொலைவில் உள்ளது. $\triangle ABC$ இன் நடுக்கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரை $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=p^{-2}$ என்று நிறுவுக.

11. தளங்கள் $7x-4y+7z+16=0$, $4x+3y-2z+3=0$ வெட்டுங் கோடும், தளங்கள் $x-3y+4z+6=0$, $x-y+z+1=0$ வெட்டுங் கோடும் ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன எனக் காட்டி, அத்தளத்தின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

12. ஆதியும், $(2, -4, 3)$ என்ற புள்ளியும், தளம் $x+3y-5z+7=0$ இன் எதிர்ப் பக்கங்களில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

13. தளம் $x+2y-2z=9$ இலிருந்து புள்ளிகள் $(2, 3, -5)$ $(3, 4, 7)$ இன் தொலைவைக் கண்டுபிடி. அவை தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் உள்ளனவா அல்லது எதிர்ப் பக்கங்களில் உள்ளனவா என்றும் காண்க.

14. பின்வரும் இணைத் தளங்களுக்கிடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.

(i) $2x-2y+z+3=0$, $4x-4y+2z+5=0$

(ii) $2x-3y+6z-2=0$, $2x-3y-6z+12=0$

15. புள்ளிகள் $(-1, 2, 3)$, $(3, -5, 6)$ஐச் சேர்க்கும் கோட்டைச் செங்குத்தாகவும் சமமாகவும் பிரிக்கும் தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

16. தளங்கள் $x+2y+2z-3=0$, $3x+4y+12z+1=0$ க்கு இடையே உள்ள கோணங்களை இரு சமக் கூறிடும் தளங்களைக் கண்டு, அவற்றுள் குறுங்கோணத்தை இருசமக் கூறிடும் தளத்தைக் கூறு.

17. தளங்கள் $3x+4y-5z+1=0$, $5x+12y-13z=0$ க்கு இடையே உள்ள விரிகோணத்தைத் தளம் $14x-8y+13=0$ இரு சமக் கூறிடும் என்று நிறுவுக.

18. தளங்கள் $x+2y+2z=9$, $4x-3y+12z+13=0$ க்கு இடைப்பட்ட குறுங்கோணப் பகுதியில் ஆதி அமைகிறது எனக் காட்டுக.

19. பின்வரும் சமன்பாடுகள் இரு தளங்களைக் குறிக்கின்றன என்று காட்டி, அவற்றினிடையே உள்ள கோணத்தையும் அறிக.

(i) $12x^2-2y^2-6z^2-2xy+7yz+6zx=0$

(ii) $2x^2-2y^2+4z^2+6xz+2yz+3xy=0$

20. புள்ளிகள் $(1, 2, 3)$, $(-2, 1, 4)$, $(3, 4, -2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

21. ஒரு நான்முகியின் உச்சிகள் $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, $(4, 3, 6)$, $(2, 3, 2)$ என்றால், அதன் கன அளவு 6 என்று காட்டுக.

22. ஒரு நான்முகியின் முகங்கள் $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=1$ என்றால், அதன் கன அளவைக் கணக்கிடு.

23. ஒரு மாறுந்தளம் ஆயத்தளங்களோடு $64\, k^3$ என்ற மாறாத கன அளவைக் கொண்ட நான்முகியை உருவாக்கினால், அதன் நடுக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வரையைக் காண்க.

24. P_1, P_2, P_3, P_4 என்பவை வெளியில் ஒரு நாற்கரத்தின் உச்சிகளாகும். ஒரு தளம் $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P_4$, $P_4 P_1$ என்ற கோடுகளை முறையே A, B, C, D இல் சந்திப்பின்,

$$\frac{P_1A}{AP_2} \cdot \frac{P_2B}{BP_3} \cdot \frac{P_3C}{CP_4} \cdot \frac{P_4D}{DP_1} = 1$$ என நிறுவுக.

25. நான்கு புள்ளிகள் $P_r\ (x_r, y_r, z_r)$; $r=1, 2, 3, 4$ தரப்படுமெனில், பொதுவாக $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ ஆகியவற்றிற்கு இணையாக $lx+my+nz=0$ என்ற ஒரு தளமே உண்டு என்று காட்டுக.

ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் எந்தத் தளமும் மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக அமையும் என்று நிறுவுக.

3. நேர்க்கோடுகள்

(Straight Lines)

ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் இரண்டில் ஒருங்கமையாகப் பொருந்தும் எல்லாப் புள்ளிகளும் ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன. மறுதலையாக, s கொடுக்கப்பட்ட கோடாகவும் $\pi_1=0=\pi_2$ இக்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் இருதளங்களின் சமன்பாடுகளுமெனில், s இன் மேல் அமையும் புள்ளிகள் யாவும் இந்த இரு சமன்பாடுகளிலும் ஒருங்கமையாகப் பொருந்துதல் வேண்டும். ஆகவே இந்த இரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே s இன் சமன்பாடுகள் என்று அழைக்கின்றோம். இச்சமன்பாடுகள் ஒரே முறை (unique) யினவையல்ல. ஏனெனில் s இன் வழியாகச் செல்லும் வேறு எவையேனும் இரு தளங்களின் சமன்பாடுகளைக் கொண்டும் இக்கோட்டைக் குறிக்கலாம்.

நேர்க்கோடு s இன் சமன்பாடுகள் $a_1x+b_1y+c_1z+d=0$, $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ என்றால், சமன்பாடுகள் $a_1x+b_1y+c_1z=0$, $a_2x+b_2y+c_2z=0$, s க்கு இணையாக ஆதி வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

3·1. ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளைச் சமச்சீரான வடிவத்தில் காணல்

$A\ (x_1, y_1, z_1)$ நேர்க்கோட்டின்மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியாகவும், $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ அதன் திசைக் கொசைன்களாகவும் கொள்க. கோட்டின் மேல் $P\ (x, y, z)$ ஏதாகிலுமொரு புள்ளியென்க.

$AP=r$ (என்க)

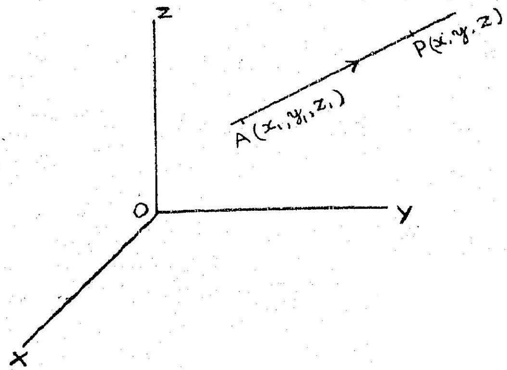
x அச்சின் மேல் AP இன் குத்து வீழல்

$$=x-x_1$$
$$=r\cos\alpha$$

அதாவது; $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=r$

இதே போல, $\dfrac{y-y_1}{\cos\beta}=r$; $\dfrac{z-z_1}{\cos\gamma}=r$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}=r$$



படம் 27

திசைக் கொசைன்களை (l,m,n) ஆக எடுத்துக் கொண்டால், P இன் ஆய எண்களை (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr) என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். r இன் மதிப்பு மாறுவதற்கேற்ப இக்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் யாவும் பெறப்படுகின்றன. r துணையலகு (Parameter) என அழைக்கப்படுகிறது. இக்கோட்டில் அமைந்துள்ள புள்ளிகளுக்கும் r இன் மதிப்புகளுக்கும் $(-\infty<r<\infty)$ ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பு (1-1 correspondence) இருப்பதை அறியலாம்.

(l, m, n) திசைக் கொசைன்களாக இல்லாமல் திசைத் தகவுகளாக இருப்பின், புள்ளி (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr) நேர்க்கோட்டில் அமையும். இங்கு (x, y, z), $(x_1\ y_1\ z_1)$ புள்ளிகளின் இடைத்தொலைவு r ஆக இராது.

துணைமுடிவு

மேற்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}\ ;\ \frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

அதாவது, $m(x-x_1) = l(y-y_1)$;

$$n(y-y_1) = m(z-z_1) \text{ ஆகும்.}$$

இவையிரண்டும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாதலால், இருதளங்களைக் குறிக்கின்றன. இவை வெட்டிக் கொள்ளும் கோடே கொடுக்கப் பட்ட நேர்க்கோடாகும்.

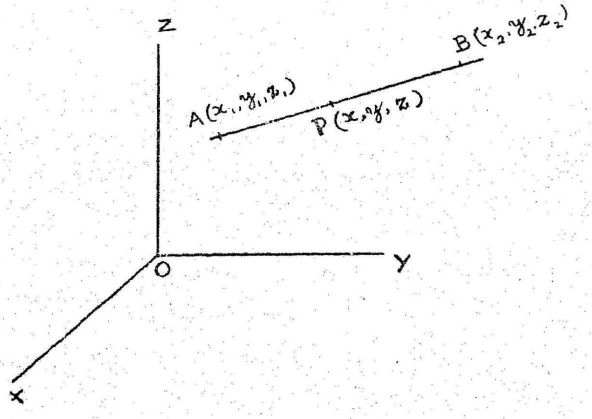
இவற்றைப் பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கும் போது,

$$x = \frac{l}{m} y + \frac{mx_1 - ly_1}{m} ; \quad y = \frac{m}{n} z + \frac{ny_1 - mz_1}{n}$$

இச்சமன்பாடுகள் $x = ay + b$; $y = cz + d$ என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றன. ஆகவே ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளில் எவையேனும் நான்கு மாறிலிகள் அடங்கியுள்ளன என்பது புலனுகின்றது.

3·2. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் நேர்க் கோட்டின் சமன்பாடுகளை அறிதல்

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ எனக் கொள்க.



படம் 28

$P(x, y, z)$, கோட்டின் மேல் அமைந்த ஏதாவதொரு புள்ளியென்க.

AB ஐ P, $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1} ; \quad y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1} ; \quad z = \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}$$

இவற்றிலிருந்து

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ஆகவே நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$ என்ருகும்.

நேர்க் கோட்டின் திசைக் கொசன்கள் $(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ ஆகியவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்தில் உள்ளன என்பதை அறிகிருேம்.

உட்பிரிவு 1·14 ஐப் பயன்படுத்தியும் இம்முடிவைக் காணலாம்.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் திசைத் தகவுகள் x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2 ஆகும்.

எனவே கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

அல்லது $$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{y-y_2}{y_1-y_2} = \frac{z-z_2}{z_1-z_2}$$ ஆகும்.

துணை முடிவு

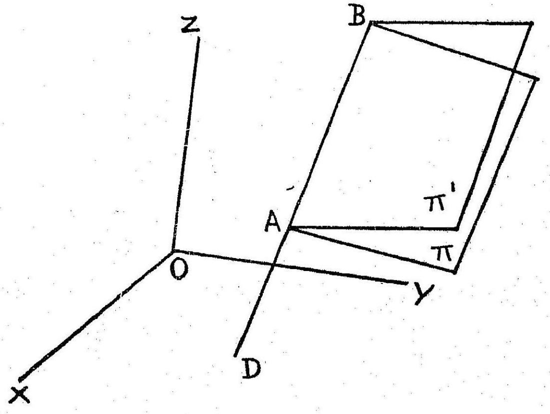
AB இன் திசைத் தகவுகள் (a, b, c) என்ருல், அதன் சமன்பாடுகள் $$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$ ஆகும்.

இந்த ஒவ்வொரு பின்னமும் k க்குச் சமமாகக் கொள்ளப்பட்டால், P இன் ஆய எண்கள் (x_1+ak, y_1+bk, z_1+ck) என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றன. இங்கே k என்ற துணையலகு விகிதம் $AP : PB$ ஐச் சார்ந்துள்ளது. ஆகவே, இக் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளும் k இன் மதிப்புக்களும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பாய் அமைகின்றன.

3·3. ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள் $ax+by+cz+d=0$, $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ எனத் தரப்படுமெனில், அவற்றைச் சமச்சீரான வடிவத்தில் அமைத்தல்

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் π, π' என்ற இரு தளங்களைக் குறிப்பதாகுக. இவை வெட்டிக்கொள்ளும் கோடான AB யே

தரப்பட்டுள்ள நேர்க்கோடாகும். AB இன் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனக் கொள்க.



படம் 29

இத் தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) ஆவன. இவை AB க்குச் செங்குத்தாக உள்ளன.

எனவே,

$$al+bm+cn=0$$
$$a_1l+b_1m+c_1n=0$$

$$\therefore \frac{l}{bc_1-b_1c} = \frac{m}{ca_1-c_1a} = \frac{n}{ab_1-a_1b}$$

AB இன் திசைத் தகவுகள் $(bc_1-b_1c,\ ca_1-c_1a,\ ab_1-a_1b)$ ஆகின்றன.

AB, தளம் XOY ஐ D இல் சந்திக்கட்டும்.

D இன் ஆய எண்கள் $(x_1, y_1, 0)$ என்க. இவை கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் பொருந்துவதால்,

$$ax_1+by_1+d=0$$
$$a_1x_1+b_1y_1+d_1=0 \text{ ஆகின்றன.}$$

இத் தொடர்புகளிலிருந்து,

$$\frac{x_1}{bd_1-b_1d} = \frac{y_1}{da_1-d_1a} = \frac{1}{ab_1-a_1b}$$

ஆகவே, D இன் ஆய எண்கள் $\left(\frac{bd_1-b_1d}{ab_1-a_1b}, \frac{da_1-d_1a}{ab_1-a_1b}, 0\right)$ ஆவன.

எனவே, தரப்பட்டுள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள் சமச்சீராக பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

$$\frac{x-\frac{bd_1-b_1d}{ab_1-a_1b}}{bc_1-b_1c} = \frac{y-\frac{da_1-d_1a}{ab_1-a_1b}}{ca_1-c_1a} = \frac{z}{ab_1-a_1b}$$

3·4. கொடுத்த தளத்திற்கும் நேர்க்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணத்தைக் காணல்

தளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz+d=0$ எனவும், நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள் $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ எனவும் ஆகுக.

தளத்திற்கும் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் θ எனில், தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டிற்கும் கொடுத்த நேர்க்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $90°-\theta$ ஆகும்.

செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (a, b, c) என்பன.

ஆகவே, $\cos(90°-\theta) = \frac{al+bm+cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)}}$

அதாவது, $\sin\theta = \frac{al+bm+cn}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(l^2+m^2+n^2)}}$

கொடுத்த கோடு தளத்திற்கு இணையாக அமைந்தால், $\theta=0$.

$\therefore\ al+bm+cn=0$

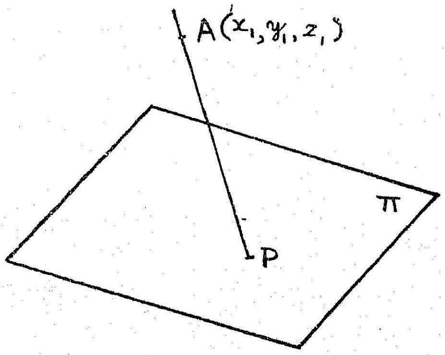
இன்னொரு காரணத்தினாலும் இம் முடிவு எளிதாக அறியப்படுகின்றது. கொடுத்த நேர்க்கோடு, தளத்திற்கு இணையெனில், தளத்தின் செங்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமைகின்றது.

3·5. ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு தளத்தில் அமைய நிபந்தனைகள்

நேர்க்கோட்டை $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ எனவும் தளத்தை $ax+by+cz+d=0$ எனவும் கொள்க.

நேர்க்கோட்டில் P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x_1+l\lambda,\ y_1+m\lambda,\ z_1+n\lambda)$ என்ற வடிவத்தில் கிடைக்கின்றன. துணையலகு λ இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க, P தளத்தில்

அமைவதாக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். P இன் ஆய எண்கள் தளத்தின் சமன்பாட்டில் பொருந்த வேண்டும்.



படம் 30

$\therefore\ a(x_1+l\lambda)+b\ (y_1+m\lambda)+c\ (z_1+n\lambda)+d=0.$ அதாவது, $\lambda(al+bm+cn)+\ (ax_1+by_1+cz_1+d)=0-(1)$

நேர்க்கோடு முழுமையும் தளத்தில் அமைந்தால், λ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் சமன்பாடு (1) பொருந்துவதாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே இச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை (identity) ஆகும்.

$\therefore\ al+bm+cn=0$ ——— (2)

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ ——— (3)

இந்நிபந்தனைகளின் வடிவகணிதப் பொருளைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

ஒரு கோடு ஒரு தளத்தில் அமையுமெனில்,

(i) அந்தத் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடு கொடுக்கப் பட்ட கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

(ii) கோட்டிலுள்ள எந்தப் புள்ளியும் தளத்தில் அமையும்.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு தளத்திற்கு இணையாக இருப்பின் முதல் நிபந்தனை கிடைக்கின்றது.

3·6. நேர்க்கோடு $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டை அறிதல்

தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $ax+by+cz+d=0$ என்க. புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இதன் மேல் அமைவதால், $ax_1+by_1+cz_1+d=0.$

$\therefore\ a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ (d நீக்கப்பட்டுள்ளது).

கொடுத்த நேர்க்கோடு தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கின்றது.

ஆகவே, $al+bm+cn=0$.

a, b, c என்பவை தொடர்பு $al+bm+cn=0$ ஆல் இணைக்கப்பட்டபடி தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ என்பதே.

3·7. நேர்க்கோடுகள் $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$; $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ ஆகியவை ஒரு தளத்தில் அமைய நிபந்தனை காணல்

முதல் நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$ ——(1)

இதில் $al_1+bm_1+cn_1=0$ ——(2)

இத்தளத்தில் இரண்டாவது நேர்க்கோடும் அமையவேண்டுமானுல்,

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1)=0 \quad \text{——(3)}$$
$$al_2+bm_2+cn_2=0 \quad \text{——(4)}$$ ஆகும்.

தொடர்புகள் (2), (3), (4) என்பவைகளிலிருந்து a, b, c, ஐ நீக்குக.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{——(5)}$$

இதுவே தேவையான நிபந்தனையாகும்.

தொடர்புகள் (1), (2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து a, b, c ஐ நீக்க,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$ என்றாகும்.

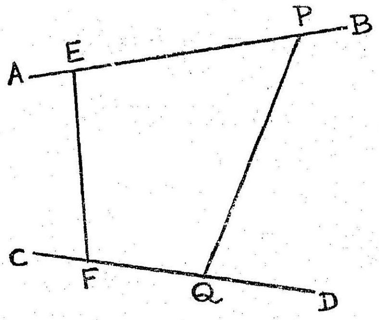
இச்சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகள் வழியாகச் செல்லும் தளத்தைக் குறிக்கவேண்டுமெனில், தொடர்பு (5) மெய்யாக இருத்தல் வேண்டும்.

3·8. இரு வெட்டாக் கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவை (Shortest Distance) க் கணக்கிடுதல்

கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_r}{l_r}=\frac{y-y_r}{m_r}=\frac{z-z_r}{n_r}\ (r=1,2) \text{ ஆகுக.}$$

P, Q இன் ஆய எண்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) என்க. இக்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு EF ஆகுக.



படம் 31

EF இன் திசைக் கொசன்கள் (λ, μ, λ) எனக் கொள்க. வரையறையின்படி, EF இரு கோடுகளுக்கும் செங்குத்தாக அமையும்.

$$\therefore\ \lambda\, l_1+\mu\, m_1+\lambda\, n_1=0$$
$$\lambda\, l_2+\mu\, m_2+\lambda\, n_2=0$$

இவற்றிலிருந்து கிடைப்பது

$$\frac{\lambda}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{\mu}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{\gamma}{l_1m_2-l_2m_1}=\frac{1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}}$$

கொடுத்த கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு

$= EF$

$= EF$ இன் மேல் PQ இன் குத்துவீழல்

$$= \lambda\,(x_1-x_2)+\mu(y_1-y_2)+\gamma(z_1-z_2)$$

$$= [(x_1-x_2)\,(m_1n_2-m_2n_1)+(y_1-y_2)\,(n_1l_2-n_2l_1)+ (z_1-z_2)\,(l_1m_2-l_2m_1)] \div \sqrt{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \left\{\Sigma(m_1n_2-m_2n_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

இரு நேர்க்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு பூச்சியமென்றால், அவை சந்திக்கின்றவையாகும். ஆகவே, அவை ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன. அதற்குரிய நிபந்தனையை இங்கே உய்த்தறியலாம். அதாவது, இரு நேர்க்கோடுகள் ஒரு தளத்தில் அமையவேண்டுமெனில், அவற்றிற்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு = 0.

$$\therefore \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

உட்பிரிவு 3·7 இல், இதே முடிவை வேறு வழியில் கண்டுள்ளோம்.

நேர்க்கோடுகள் AB, EF வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda & \mu & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \text{——(1)}$$

நேர்க்கோடுகள் CD, EF வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

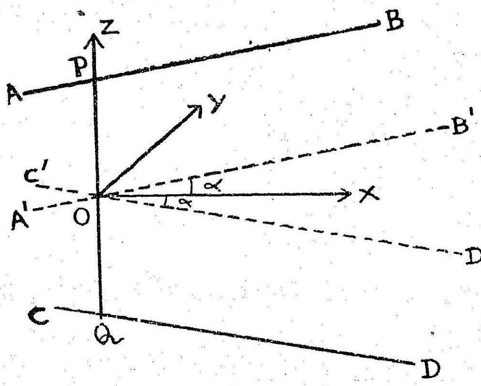
$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \lambda & \mu & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \text{——(2)}$$

இந்த இரு சமன்பாடுகளும் ஒருங்கே மீச்சிறு தொலைவு அமைந்த நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கின்றன.

3·9 இருவெட்டாக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை எளிய வடிவத்தில் காணல்

இரு வெட்டாக் கோடுகள் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளில் ஆய அச்சுகளை நாமே தெரிந்து கொள்ளுவதால், கணிக்கின்ற வேலையை அதிகமாகக் குறைத்துக் கொள்ள வழியுண்டு. ஆய அச்சுகள் தகுந்த முறையில் எடுத்துக் கொள்ளப்படவேண்டும்.

கேள்வியில் உள்ள கோடுகள் AB, CD என்க. PQ அவற்றிற்கிடையே உள்ள பொதுச் செங்கோடாகக் கொள்க PQ இன் நடுப் புள்ளி O என்க. O வழியாக AB, CDக்கு இணையாக முறையே $A'B'$, $C'D'$ என்ற கோடுகளை வரைக. O ஐ ஆதியாகவும் $B'\widehat{O}D'$ இன் உள், வெளிச் சமவெட்டிகளை முறையே X, Y அச்சுகளாகவும், PQ ஐ Z அச்சாகவும் கொள்க. அமைப்பின்படி XOY தளம் AB, CDக்கு இணையாக இருப்பதால், Z அச்சுக்குச் செங்குத்தாக



படம் 32

அமையும். அதோடு கூட, $X\widehat{O}Y$ ஒரு செங்கோணமாகும். எனவே மூன்று அச்சுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

AB, CD என்ற கோடுகளின் இடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு $2c$ எனவும், கோணம் 2α எனவும் கொள்க. $A'B'$ ஆய அச்சுகளோடு பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் முறையே $\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}$ ஆவன. $AB \parallel A'B'$ என்பதால், AB இன் திசைக் கொசைன்கள் $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ ஆகின்றன. $C'D'$ ஆய அச்சுகளோடு உண்டாக்கும் கோணங்கள் முறையே $\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha, \frac{\pi}{2}$ என்பவையே. ஆகவே CD இன் திசைக் கொசைன்கள் $(\cos\alpha, -\sin\alpha, 0)$ ஆவன.

$PQ=2c$ என்பதால், P இன் ஆய எண்கள் $(0, 0, c)$ எனவும் Q இன் ஆய எண்கள் $(0, 0, -c)$ எனவும் உள்ளன.

சமச்சீரான வடிவில் கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\pm\sin\alpha} = \frac{z\mp c}{0}$ ஆகின்றன.

$\tan\alpha = m$ எனப் பிரதியிட்டால், மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு எழுதப்படலாம்.

$$y = \pm\, mx, \quad z = \pm\, c$$

3·10. மூன்று தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளுதல்

மூன்று தளங்கள் இரண்டிரண்டாக வெட்டிக் கொள்ளும் போது மூன்று வகைகள் எழுவதைக் காணலாம்.

(i) மூன்று தளங்களும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(ii) மூன்று தளங்களும் ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியே செல்லுகின்றன.

(iii) மூன்று தளங்களும் ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தை உருவாக்குகின்றன.

ஒவ்வொரு வகைக்கும் தனித் தனியே நிபந்தனைகளைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

(i) தளங்களின் சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$u_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$u_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$u_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

இவற்றை ஒருங்கமையாகத் தீர்த்தால்,

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

இந்நான்கு அணிக்கோவைகளையும் முறையே $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta$ எனக் குறிப்போம்.

$\Delta \neq 0$ எனில், x, y, z ஆகியவைகளுக்குத் திட்டமான மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன. ஆகவே மூன்று தளங்களும் ஒரு திட்டமான புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(ii) மூன்று தளங்களுக்கும் ஒரு பொதுவான வெட்டுங்கோடு அமைந்தால், பின்வரும் முற்றொருமை கிடைக்கின்றது.

முதலிரண்டு தளங்களும் வெட்டுங் கோட்டின் வழியாக மூன்றுவது தளமும் செல்லுவதால், அதன் சமன்பாடு $u_1 + \lambda u_2 = 0$ என்ற வடிவத்தில் அமைய வேண்டும்.

$\therefore \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \equiv -\lambda_3 u_3$ என எழுதலாம்.

அதாவது,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \equiv 0$$

இதிலிருந்து

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$$
$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$$
$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$$
$$\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$$

என்ற தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

இவற்றிலிருந்து λ_1, λ_2, λ_3 ஆகிய தெரியா மாறிலிகளை நீக்க, பின்வரும் நான்கு நீக்கற்பலன்கள் (**eliminants**) கிடைக்கின்றன.

$$\Delta = 0\,; \quad \Delta_1 = 0\,; \quad \Delta_2 = 0\,; \quad \Delta_3 = 0.$$

இவை நான்கும் ஒன்றுக்கொன்று சாராதவையல்ல. இவற்றில் எவையேனும் இரண்டைக் கொண்டு, மற்ற இரண்டையும் அடையலாம். ஆகவே இந்நான்கு முடிவுகளில் எவையேனும் இரண்டுதான் சார்பில்லாதவைகள். இந்த இயற்கணித முடிவிற்கு ஒரு வடிவ கணிதப் பொருளைத் தரமுடியும். மூன்று தளங்களுக்கு இரு புள்ளிகள் பொதுவாக அமைந்தால் அவைகளுக்கு ஒரு பொது வெட்டுங்கோடு ஏற்படுமென்பது தெளிவாகின்றது.

(iii) முதலிரண்டு தளங்களும் இணையல்ல என்று ஒப்புக் கொள்வோம். அவை வெட்டுங்கோடு

$$\frac{x - \dfrac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y - \dfrac{a_2 d_1 - a_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{z}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ ஆகும்.}$$

இது மூன்றாவது தளத்திற்கு இணையாக அமையுமெனின்,

$$a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b_3(c_1 a_2 - c_2 a_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

அதாவது, $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

i e., $\Delta = 0$

ஆகவே எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட மூன்று தளங்களும் ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தை உண்டாக்கினால், $\Delta = 0$ என அறிகின்றோம்.

மேற்கண்ட முடிவுகளின் சுருக்கம்

(i) மூன்று தளங்களும் ஒரு திட்டமான புள்ளியில் சந்தித்தால், $\triangle \neq 0$.

(ii) மூன்று தளங்களும் ஒரு நேர்க்கோட்டின் வழியேச் சென்றால், அணிக்கோவைகள் $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ இல் எவையேனும் இரண்டு பூச்சியமாக வேண்டும்.

(iii) மூன்று தளங்களும் ஒரு முக்கோணப் பட்டகத்தை உண்டாக்கினால், $\triangle$ மட்டுமே பூச்சியமாகும்.

3·11. இரு நேர்க்கோடுகளைச் சந்திக்கும் நேர்க்கோட்டின் பொதுவான சமன்பாடுகளை அறிதல்

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகள் $u_1=0=v_1$; $u_2=0=v_2$ ஆகுக. தளம் $u_2+\lambda_1 v_1=0$ (λ_1 யாதானுமொரு மாறிலி) முதல் நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றது.

தளம் $u_2+\lambda_2 v_2=0$ (λ_2 யாதானுமொரு மாறிலி) இரண்டாவது நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றது.

நேர்க்கோடு $u_1+\lambda_1 v_1=0=u_2+\lambda_2 v_2$ முதற் கோட்டுடன் ஒரே தளத்தில் அமைவதால் அதைச் சந்திக்கின்றது. மேலும் அது இரண்டாவது கோட்டுடனும் ஒரே தளத்தில் அமைவதால் அதைச் சந்திக்கின்றது.

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளைச் சந்திக்கும் கோட்டின் பொதுவான சமன்பாடுகள் $v_1+\lambda_1 v_1=0=u_2+\lambda_2 v_2$ என்பவையே. λ_1, λ_2 எவையேனுமிரு மாறிலிகளாதலால், இவற்றின் மதிப்புக்கள் இரு மடங்கு முடிவிலாதவைகளாகும் (doubly infinite). ஆகையால் இவ்வகை நேர்க்கோடுகள் இருமடங்கு முடிவிலா எண்ணிக்கையுடையனவாகும்.

குறிப்பு : ஏதாவதொரு வடிவ கணித நிபந்தனை தரப்படுமெனின், இந்நேர்க்கோடுகள் அமையும் வரைபரப்பினை (Ruled surface)க் கண்டு பிடிக்கலாம்.

3·12. கொடுக்கப்பட்ட மூன்று கோடுகளைச் சந்திக்கும் நேர்க்கோட்டினால் உருவாக்கப்படும் வரைபரப்பினைக் கண்டு பிடித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட மூன்று நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $u_1=0=v_1$; $u_2=0=v_2$; $u_3=0=v_3$ ஆவன.

ஒவ்வொரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளங்கள் முறையே $u_1+\lambda_1 v_1=0$, $u_2+\lambda_2 v_2=0$, $u_3+\lambda_3 v_3=0$ ஆகும்.

λ_1, λ_2, λ_3 ஆகியவை எவையேனும் மூன்று மாறிலிகள். இம் மூன்று கோடுகளையும் ஒரு நேர்க்கோடு சந்திக்க வேண்டுமெனின், இத்தளங்களுக்கு ஒரு பொது வெட்டுங்கோடு அமைய வேண்டும். உட்பிரிவு 3·10 இன்படி, இதற்கான நிபந்தனைகள் $f_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=0$, $f_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=0$ ஆவன். இவற்றுள் ஒரு தொடர்பை எடுத்துக் கொண்டு மூன்று தளங்களின் சமன்பாடுகளின் உதவியால் மாறிலிகள் λ_1, λ_2, λ_3 ஐ நீக்க, தேவையான வரைபரப்பு கிடைக்கும்.

மாதிரி 1: புள்ளிகள் $(11, 0, 1)$, $(-9, 4, 5)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-11}{11+9}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-1-5} \text{ ஆவன.}$$

$$i.\,e., \quad \frac{x-11}{10}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-3}=\lambda \text{ (என்க)}$$

P தேவையான புள்ளியெனில், அதன் ஆய எண்கள் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம்.

$(11+10\lambda, -2\lambda, -1-3\lambda)$

OP இன் திசைத் தகவுகள் $(11+10\lambda, -2\lambda, -1-3\lambda)$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு OP செங்குத்தாக இருப்பதால், $10(11+10\lambda)-2(-2\lambda)-3(-1-3\lambda)=0$

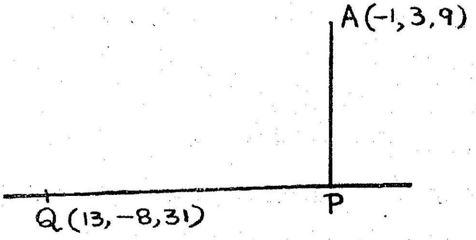
$i.\,e.,\quad 113+113\lambda=0$

$\therefore \lambda=-1$

ஆகவே P இன் ஆய எண்கள் $(1, 2, 2)$ ஆகும்.

மாதிரி 2: நேர்க்கோடு $\dfrac{x-13}{5}=\dfrac{y+8}{-8}=\dfrac{z-31}{1}$ இலிருந்து $A\,(-1, 3, 9)$ என்ற புள்ளியின் தொலைவைக் கணக்கிடு.

நேர்க்கோட்டில் ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(13+5\lambda, -8-8\lambda, 31+\lambda)$ எனப் பெறப்படும். இப்புள்ளி P எனின் AP இன் திசைத் தகவுகள் $(14+5\lambda, -11-8\lambda, 22+\lambda)$ ஆகும்.



படம் 33

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு AP செங்குத்தாக இருப்பதால், $5(14+5\lambda)+8(11+8\lambda)+(22+\lambda)=0$

இதிலிருந்து $\lambda=-2$ என்றாகும்.

ஆகவே P இன் ஆய எண்கள் $(3, 8, 29)$ ஆவன.

$$AP^2=(-1-3)^2+(3-8)^2+(9-29)^2$$
$$=441$$

$\therefore AP=21$. இதுவே கோட்டிலிருந்து A இன் செங்குத்துத் தொலைவாகும்.

மாதிரி **3** : தளங்கள் $3x-2y+z-1=0$, $5x+4y-6z-2=0$ ஆகியவை வெட்டுங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைச் சமச்சீரான வடிவத்தில் காண்க.

இத்தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் முறையே $(3,-2,1)$; $(5,4,-6)$ ஆவன.

தேவையான நேர்க்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) என்க.

இரு செங்கோடுகளுக்கும் தளங்கள் வெட்டுங்கோடு செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$3l-2m+n=0$$
$$5l+4m-6n=0$$

இவற்றிலிருந்து

$$\frac{l}{12-4} = \frac{m}{5+18} = \frac{n}{12+10}$$

அதாவது $l : m : n = 8 : 23 : 22$ ஆகும்.

நேர்க்கோட்டின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். கொடுக்கப்பட்ட கோடு YOZ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் $x=0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$-2y+z-1=0$$

$$4y-6z-2=0$$

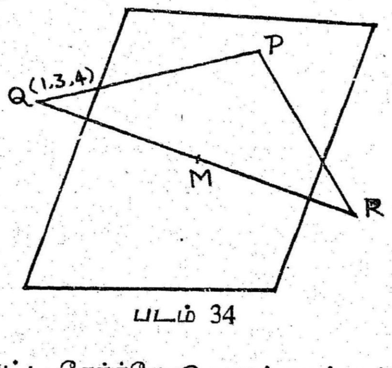
இவற்றிலிருந்து $y=-1,\ z=-1$ என்ருகின்றது.

தெரிந்துகொண்ட புள்ளி $(0, -1, -1)$ ஆகும்.

ஆகவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{8} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{22}$$ என்பவையே.

மாதிரி 4: தளம் $2x - y + z + 3 = 0$ இல் நேர்க்கோடு $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{2}$ இன் பிம்பத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



படம் 34

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு தளத்தைச் சந்திக்கு P என்க. அதன் ஆய எண்கள் $(1+3\lambda,\ 3+5\lambda,\ 4+2$ வடிவத்தில் அமைகின்றன.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தில் P அமைவதால் $2\,(1+3\lambda)-(3+5\lambda)+(4+2\lambda)+3=0$

$$\therefore\ \lambda=-2$$

அதாவது, P இன் ஆய எண்கள் $(-5,\ -7,\ 0)$ ஆவன.

நேர்க்கோட்டின்மேல் மற்றொரு புள்ளி $Q\ (1,\ 3,\ 4)$ ஆகும். தளத்தில் இதன் பிம்பம் R என்றால், நமக்குத் தேவையான நேர்க்கோடு PR ஆகும்.

QR தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால், அதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{1}$$

ஆகவே R இன் ஆய எண்கள் $(1+2\mu,\ 3-\mu,\ 4+\mu)$ ஆவன. QR இன் நடுப்புள்ளி M என்றால், அதன் ஆய எண்கள் $\left(1+\mu,\ 3-\dfrac{\mu}{2},\ 4+\dfrac{\mu}{2}\right)$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தில் M அமைவதால், $2\,(1+\mu)-(3-\frac{1}{2}\mu)+(4+\frac{1}{2}\mu)+3=0$.

இதிலிருந்து $\mu=-2$ எனவும், R இன் ஆய எண்கள் $(-3,\ 5,\ 2)$ எனவும் அறிகின்றோம்.

$P\,(-5,\ -7,\ 0)$, $R\,(-3,\ 5,\ 2)$ ஆகிய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடே தேவையான நேர்க்கோடாகும்.

அதன் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+7}{6}=\dfrac{z}{1}$ ஆவன.

மாதிரி 5: தளம் $9x+8y+2z-1=0$ இல் நேர்க்கோடு $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ என்பதன் குத்து வீழலைக் குறிக்கும் சமன்பாடுகளை அறிக.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $\left(\dfrac{x-4}{3}-\dfrac{y-2}{4}\right)+k\left(\dfrac{y-2}{4}-\dfrac{z-1}{2}\right)=0$ (k யாதானுமொரு மாறிலி.)

இத்தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் $[\frac{1}{3}, \frac{1}{4}(k-1), -\frac{1}{2}k]$ ஆகும்.

இத்தளம் கொடுக்கப்பட்ட தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைய வேண்டுமெனில்,

$$9\cdot\tfrac{1}{3}+8\cdot\tfrac{1}{4}(k-1)-2\cdot\tfrac{1}{2}k=0$$

i.e., $3+2(k-1)-k=0$

$$\therefore k=-1$$

k இன் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட்டுச் சுருக்கினால்,

$2x-3y+3z-5=0$ என்றாகும்.

தளங்கள் $2x-3y+3z-5=0$, $9x+8y+2z-1=0$ வெட்டுங் கோடே கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் குத்து வீழலாகும்.

மற்றொரு முறை: கொடுத்துள்ள நேர்க்கோடு $9x+8y+2z-1=0$ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும், புள்ளி (4, 2, 1) இலிருந்து தளத்திற்கு வரையும் செங்கோட்டடியையும் கண்டு, அவற்றை இணைக்கும் கோட்டைக் காண்க.

மாதிரி 6: நேர்க்கோடு $-x+2y+z=5$, $x+y+3z=6$ க்கு இணையாக (2, 3, 1) என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தேவையான நேர்க்கோட்டின் திசைக் தகவுகள் (l, m, n) என்க. இக்கோடு கொடுத்த நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாவதால், அக் கோட்டில் சந்திக்கும் இரு தளங்களுக்கும் இணையாக அமையும். ஆகவே நிபந்தனையின்படி,

$$-l+2m+n=0$$

$$l+m+3n=0 \text{ என்றாகும்.}$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l}{5}=\frac{m}{4}=\frac{n}{-3}$$

ஆகவே தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{-3} \text{ ஆவன.}$$

மாதிரி 7: $x+y+z=11$ என்ற தளத்திலிருந்து புள்ளி $(1, 2, 3)$ இன் தொலைவை நேர்க்கோடு $\frac{x+1}{1}=\frac{y-12}{-2}=\frac{z-7}{2}$ க்கு இணையாகக் கணக்கிடு.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக $P(1, 2, 3)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2} \text{ ஆகும்.}$$

இக் கோட்டின் மேலமைந்த ஏதாகிலுமொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(1+\lambda, 2-2\lambda, 3+2\lambda)$ எனக் கொள்ளப்படும்.

இக் கோடு கொடுக்கப்பட்ட தளத்தை Q இல் சந்திப்பதாகக் கொள்க.

Q இன் ஆய எண்கள் $(1+\lambda, 2-2\lambda, 3+2\lambda)$ எனில்

$(1+\lambda)+(2-2\lambda)+(3+2\lambda)=11$ எனவாகும்.

$\therefore \lambda=5$

Q இன் ஆய எண்கள் $(6,-8, 13)$ ஆவன.

$\therefore PQ = \sqrt{(1-6)^2+(2+8)^2+(3-13)^2}$

$=15$

மாதிரி 8: நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$; $\frac{x-8}{7}=y-4=\frac{z-5}{7}$ என்பவை ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன எனக்காட்டி, அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியையும், அவை அமையும் தளத்தையும் காண்க.

முதல் நேர்க்கோட்டின் மேல் அமையும் பொதுவான புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(5+4\lambda, 7+4\lambda, -3-5\lambda)$ எனவும், இரண்டாவது நேர்க்கோட்டின் மேல் அமையும் பொதுவான புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(8+7\mu, 4+\mu, 5+3\mu)$ எனவும் எடுத்துக் கொள்ளலாம். இவ்விரு நேர்க்கோடுகளுக்கு ஒரு பொதுப்புள்ளியிருக்குமாயின், பின்வரும் சமன்பாடுகள் இசைவுள்ளனவாக (Consistent) இருக்கவேண்டும்.

$$5+4\lambda=8+7\mu$$

அதாவது, $-3+4\lambda-7\mu=0$

$3+4\lambda-\mu=0$

$8+5\lambda+3\mu=0$

அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -7 \\ 3 & 3 & -1 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$=0$

ஆகவே, மேற்கண்ட சமன்பாடுகள் இசைவுள்ளனவாக உள்ளன. சமன்பாடுகளிலிருந்து $\lambda=-1$ என அறிகிறோம்.

ஆகவே, பொதுப் புள்ளியின் ஆய எண்கள் (1, 3, 2) ஆவன.

இவ்விரு நேர்க்கோடுகள் அமைந்த தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) எனில்,

$$4l+4m-5n=0$$
$$7l+m+3n=0$$

இத்தொடர்புகளிலிருந்து $\frac{l}{17}=\frac{m}{-47}=\frac{n}{-24}$ என்றாகும்.

ஆகவே தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$17(x-1)-47(y-3)-24(z-2)=0$$
$$i.e.,\quad 17x-47y-24z+172=0$$

மாதிரி 9 : நேர்க்கோடுகள் $x-10=\frac{y-9}{3}=\frac{z+2}{-2}$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-12}{4}=z-5$ என்பவைகளுக்கு இடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவைக் காண்க.

இரண்டு நேர்க்கோடுகளுக்கும் பொதுவான செங்குத்துக் கோடு அவற்றை P, Q இல் சந்திக்கட்டும்.

P இன் ஆய எண்கள் $(10+\lambda, 9+3\lambda, -2-2\lambda)$ எனவும், Q இன் ஆய எண்கள் $(-1+2\mu, 12+4\mu, 5+\mu)$ எனவும் உள்ளன. இதில் λ, μ என்ற மாறிலிகள் பொருத்தமாகக் கணக்கிடப் படவேண்டும்.

PQ இன் திசைத் தகவுகள் $(11+\lambda-2\mu, -3+3\lambda-4\mu, -7-2\lambda-\mu)$ ஆவன.

PQ ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக இருப்பதால்,
$(11+\lambda-2\mu)+3(-3+3\lambda-4\mu)-2(-7-2\lambda-\mu)=0$
$2(11+\lambda-2\mu)+4(-3+3\lambda-4\mu)+(-7-2\lambda-\mu)=0$

இவற்றைச் சுருக்கினால் கிடைப்பது

$$7\lambda-6\mu+8=0$$
$$4\lambda-7\mu+1=0$$
$$\lambda=-2,\ \mu=-1$$

ஆகவே P, Q இன் ஆய எண்கள் முறையே $(8,3,2)$, $(-3,8,4)$ என்பவையே

$$PQ=\sqrt{(8+3)^2+(3-8)^2+(2-4)^2}$$
$$=\sqrt{150}$$

PQ இன் சமன்பாடுகள் $\frac{x-8}{11}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{-2}$ ஆவன

மாதிரி **10** நேர்கோடு $\frac{\lambda}{a}-\frac{z}{c}=1,\ y=0$ க்கு இணையாக நேர்கோடு $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0$ இன் வழியாகச் செல்லும் தளம் $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}+1=0$ எனக் காட்டுக

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள மீச்சிறு தொலைவு $2d$ எனில், $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$ என நிறுவுக

நேர்கோடு $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=1,\ x=0$ இன் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு $\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)+\lambda x=0$ ஆகும்

$$i\ e,\ \lambda x+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

அடுத்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$\frac{x}{a}=\frac{y}{0}-\frac{z+c}{a}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படுகின்றன.

தேவையான தளம் இக் கோட்டிற்கு இணையாக அமைவதால்

$$\lambda a + \frac{1}{b} \times 0 + \frac{1}{c} \times c = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{a}$$

ஆகவே, தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0 \text{ ஆகும்}$$

முதல் நேர்க்கோட்டில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து இந்தத் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளமே கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளின் இடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவாகும்.

புள்ளி $(0, 0, -c)$ முதல் நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளது.

ஆகவே, இரு நேர்க்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு

$$= \frac{1+1}{\sqrt{1/a^2+1/b^2+1/c^2}}$$

$$= 2d \text{ (கொள்கைப்படி)}$$

அதாவது $$\frac{2}{\sqrt{1/a^2+1/b^2+1/c^2}} = 2d$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

மாதிரி 11 தளங்கள் $5x+3y+7z-4=0$, $3x+26y+2z-9=0$, $7x+2y+10z-5=0$ ஆகியவை வெட்டிக் கொள்ளும் தன்மை பற்றி ஆராய்க.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 256 - 3 \times 16 - 7 \times 176$$

$$= 0$$

அதேபோல, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

$= 0$

ஆகவே, உட்பிரிவு 3·10 இன்படி, மூன்று தளங்களும் ஒரு பொது நேர்க்கோட்டை உடையனவாக உள்ளன.

மாதிரி **12 :** தளங்கள் $x = cy + bz$, $y = az + cx$, $z = bx + ay$ ஒரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லவேண்டுமெனில், $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ என நிரூபித்து, அக்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$ எனக் காட்டுக.

கொடுக்கப்பட்ட தளங்கள் ஏற்கெனவே ஒரு பொதுப்புள்ளி (ஆதி) வழியாகச் செல்லுகின்றன. ஆகையால் அவைகளுக்கு ஒரு பொதுக் கோடு அமையவேண்டுமானால், இன்னொரு பொதுப் புள்ளி இருக்க வேண்டும். அப்புள்ளியை $P(x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்க.

P மூன்று தளங்களிலும் அமைவதால்,

$$-x_1 + cy_1 + bz_1 = 0$$
$$cx_1 - y_1 + az_1 = 0$$
$$bx_1 + ay_1 - z_1 = 0$$

இம்மூன்று தொடர்புகளிலிருந்து x_1, y_1, z_1 ஆகியவற்றை நீக்குக.

எனவே நீக்கற்பலன் $\begin{vmatrix} -1 & c & b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$ என்பதே.

i. e., $-(1-a^2) - c(-c-ab) + b(ca+b) = 0$

i. e., $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ ——— (1)

இப்பொது நேர்க்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) என்க. தளங்களின் சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$-l + cm + bn = 0$$
$$cl - m + an = 0$$

$$\therefore \frac{l}{ac+b} = \frac{m}{bc+a} = \frac{n}{1-c^2}$$

அதாவது,

$$\frac{l^2}{a^2c^2+b^2+2abc} = \frac{m^2}{b^2c^2+a^2+2abc} = \frac{n^2}{(1-c^2)^2}$$

முடிவு (1) ஐப் பயன்படுத்தி,

$$\frac{l^2}{a^2c^2+1-a^2-c^2} = \frac{m^2}{b^2c^2+1-b^2-c^2} = \frac{n^2}{(1-c^2)^2}$$

$$i.\ e.,\quad \frac{l^2}{(1-a^2)\,(1-c^2)} = \frac{m^2}{(1-b^2)\,(1-c^2)} = \frac{n^2}{(1-c^2)^2}$$

$$i.\ e.,\quad \frac{l^2}{1-a^2} = \frac{m^2}{1-b^2} = \frac{n^2}{1-c^2}$$

$$\therefore\quad \frac{l}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-c^2}}$$

ஆகவே, பொது நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$

மாதிரி 13 : வெளியில் கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகள் மாருத நீளமுள்ள துண்டை ஒரு மாறும் நேர்க்கோட்டின் மேல் வெட்டுகின்றன. அந்தத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஒரு நிலேத்த நீள் வளேயத்தின் மேல் அமையும் என்றும், நீள் வளேயத்தின் தலேயாய அச்சுகள் (Principal axes) கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளுடன் சம சாய்வுள்ளவையாகும் என்றும் நிறுவுக.

AB, CD கொடுக்கப்பட்ட இரு நேர்க்கோடுகள் என்க. அவற்றிற்கு இடையே உள்ள மீச்சிறு தொலேவு $2c$ எனவும், கோணம் 2θ எனவும் கொள்க.

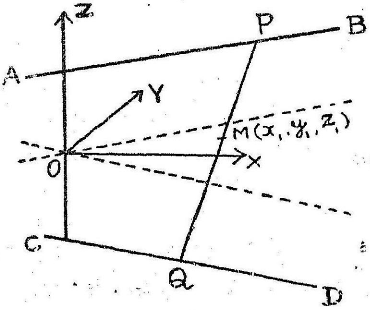
மீச்சிறு தொலேவின் நடுப்புள்ளி (O)யை ஆதியாகவும், மீச்சிறு தொலேவுக் கோட்டை Z அச்சாகவும் கொள்க. O இன் வழியாக $A'B'$, $C'D'$ ஆகிய கோடுகள் முறையே AB, CDக்கு இணையாக வரைக. $B'\hat{O}D'$ இன் சமவெட்டிகளே X, Y அச்சுகளாகக் கொள்க.

இந்தத் திட்டப்படி கொடுக்கப்பட்ட கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $y=mx,\ z=c\ ;\ y=-mn,\ z=-c\ (m=\tan\theta)$ ஆகும்.

AB, CD ஐ மாறுங்கோடு *P, Q* இல் சந்திக்கட்டும்.

$PQ = 2l$ எனவும், PQ இன் நடுப்புள்ளி $M(x_1, y_1, z_1)$ எனவும் கொள்க.

M இன் இயங்குவரையைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும்.



படம் 35

P இன் ஆய எண்கள் $(\alpha, m\alpha, c)$ ஆகவும், Q இன் ஆய எண்கள் $(\beta, -m\beta, -c)$ ஆகவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

PQ இன் நடுப்புள்ளியாக M இருப்பதால், பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$2x_1 = \alpha + \beta$$
$$2y_1 = m(\alpha - \beta)$$
$$2z_1 = 0$$

$$PQ^2 = (\alpha - \beta)^2 + m^2(\alpha + \beta)^2 + 4c^2$$

அதாவது,

$$4l^2 = \frac{4y_1^2}{m^2} + m^2 \cdot 4x_1^2 + 4c^2$$

$$i.\ e., \quad m^2x_1^2 + \frac{y_1^2}{m^2} = l^2 - c^2$$

இதைப் பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1$$

நமக்குக் கிடைத்துள்ள முடிவுகள்

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} &= 1 \\ z_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ஆகவே M இன் இயங்குவரை

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}$$ என்பதே.

இது XOY தளத்தில் அமைந்த ஒரு நீள் வளையம் (**ellipse**); இதன் தலையாய அச்சுகள் $B'\widehat{O}D'$ இன் சமவெட்டிகளாக இருப்பதால், இவை கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகளுக்குச் சமச் சாய்வுள்ளவைகளாய் இருக்கின்றன.

மாதிரி **14** : நேர்க்கோடுகள் $2x+y-1=0=x-2y+3z$; $3x-y+z+2=0=4x+5y-2z-3$ ஒவ்வொன்றையும் சந்திக்கும் ஒரு கோடு, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக அமையுமெனில், அதன் சமன்பாடுகளை அறிக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கோடுகளைச் சந்திக்கும் கோட்டின் பொதுவான சமன்பாடுகள்

$$(2x+y-1)+\lambda_1(x-2y+3z)=0$$
$$(3x-y+z+2)+\lambda_2(4x+5y-2z-3)=0$$

இக்கோடு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக அமையுமெனில், இச்சமன்பாடுகளால் குறிக்கப்படும் ஒவ்வொரு தளமும் அதற்கு இணையாக இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே $(2+\lambda_1)+2(1-2\lambda_1)+3(3\lambda_1)=0$

$$(3+4\lambda_2)+2(-1+5\lambda_2)+3(1-2\lambda_2)=0$$

இவற்றிலிருந்து $\lambda_1=-\frac{2}{3}$; $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ஆகும்.

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$4x+7y-6z-3=0,\ 2x-7y+4z+7=0$ ஆவன.

மாதிரி **15**: $y=b,\ z=-c$; $z=c,\ x=-a$; $x=a,\ y=-b$ என்ற நேர்க்கோடுகள் மூன்றையும் வெட்டுங்கோட்டின் இயங்குவரையைக் கண்டுபிடி.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோடுகளின் வழியாகச் செல்லும் தளங்களின் பொதுவான சமன்பாடுகள்

$$y-b+\lambda_1(z+c)=0$$
$$z-c+\lambda_2(x+a)=0$$
$$x-a+\lambda_3(y+b)=0$$

இத்தளங்களை ஒரு நேர்க்கோடு சந்திக்க வேண்டுமெனில், இவற்றிற்குப் பொதுவான ஒரு வெட்டுங்கோடு அமையவேண்டும்.

ஆகவே,
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

அணிக்கோவையை விரித்தால் கிடைப்பது $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 1 = 0$ ஆகும். நான்கு சமன்பாடுகளிலிருந்தும், λ_1, λ_2, λ_3 என்ற மாறிலிகளை நீக்க,

$$\frac{y-b}{z+c} \cdot \frac{z-c}{x+a} \cdot \frac{x-a}{y+b} = 1 \text{ எனவாகும்.}$$

அதாவது $(x+a)(y+b)(z+c) = (x-a)(y-b)(z-c)$

$\therefore \quad ayz + bzx + cxy + abc = 0$

இதுவே தேவையான இயங்குவரையின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 3

1. நேர்க்கோடு $x+y-z+1=0$, $4x+y-2z+2=0$ இன் திசைக் கொசைன்களைக் கணக்கிடு.

2. புள்ளி $(2, 3, 4)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு அச்சுகளுக்குச் சமச் சாய்வுள்ளதாக அமையுமெனின், அதன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. பின்வரும் புள்ளிச் சோடிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோடுகளைக் கண்டுபிடி.

   (i) $(2, 3, 7)$; $(2, -5, 8)$ (ii) $(-7, 5, 3)$; $(2, 6, 8)$

4. பின்வரும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளைச் சமச் சீரான வடிவத்தில் எழுதுக.

   (i) $x+5y-z-7=0$, $2x-5y+3z+1=0$

   (ii) $x+y+z+1=0$, $4x+y-2z+2=0$

5. நேர்க்கோடு $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+5}{2}$ இல் புள்ளி $(2, -3, -5)$ க்கு இருபுறமும் 3 அலகுகள் தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க,

6. தளம் $3x+4y+5z=5$ ஐ நேர்க்கோடு $\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-2}$ சந்திக்கும் புள்ளி யாது ?

7. புள்ளிகள் $(2, -3, 1)$, $(3, -4, -5)$ ஐச் சேர்க்கும் கோடு $2x+y+z=7$ என்ற தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

8. நேர்க்கோடு $x+y-z-1=0=2x-3y+z-2$ க்கும் புள்ளிகள் $(3, -1, 2)$, $(4, 0, -1)$ ஐச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடு.

ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு மேற்கண்ட கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்படி அதன் சமன்பாடுகளை அறிக.

9. புள்ளி $(-1, 3, 2)$ இலிருந்து தளம் $x+2y+2z=3$க்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் அடியைக் காண்க.

10. பின் வருவனவற்றைக் காண்க :

$2x-3y+2z+3=0$ என்ற தளத்தில் புள்ளி $(1, -2, 3)$ இன் பிம்பம்.

$2x-y+z+3=0$ என்ற தளத்தில் புள்ளி $(1, 3, 4)$ இன் பிம்பம்.

11. நேர்க்கோடு $x-1=-9y+18=-3z-9$, தளம் $3x-3y+10z=26$ க்கு இணையாக உள்ளது என்று நிறுவுக. தளத்தில் இக் கோட்டின் பிம்பம் $x-4=-9y-9=-3z+21$ என்றும் காட்டுக.

12. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணத்தைக் கணக்கிடு.

$$3x+2y+z-5=0=x+y-2z-3$$

$$8x+4y-4z=0=7x+10y-8z$$

13. புள்ளி $(1, 2, 3)$ வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு $x+1=2y-4=z+4$ என்ற கோட்டைச் சந்திக்கின்றது. மேலும் அக்கோடு தளம் $x+5y+z=0$ க்கு இணையாக அமைந்தால், அதன் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14. புள்ளி $(2, 3, 4)$ வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக அமைந்து, $x=y=z$ என்ற நேர்க்கோட்டைச் சந்திக்குமெனில் அதன் சமன்பாடுகளை அறிக.

15. புள்ளி $(-6, -4, -6)$ வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{3}$; $-x-2=\frac{1}{2}(y-1)=-z-1$ என்ற கோடுகளைச் சந்திக்குமெனில் அதன் சமன்பாடுகளையும், சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆய எண்களையும் காண்க.

16. நேர்க்கோடுகள் $9x+y+z+4=0=5x+y+3z$; $x+2y-3z-3=0=2x-5y+3z+3$ ஐச் சந்திக்கும் ஒரு நேர்க்கோடு $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக இருப்பின், அதன் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

17. திசைத் தகவுகள் $(7, 4, 1)$ கொண்ட ஒரு நேர்க்கோடு, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-7}{-1}=\frac{z+2}{1}$; $\frac{x+3}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{4}$ என்ற கோடுகளைச் சந்திக்கின்றது. சந்திக்கும் புள்ளிகளையும் அக்கோட்டின் மேல் வெட்டப்பட்டத் துண்டின் நீளத்தையும் காண்க.

18. நேர்க்கோடு $\frac{x-3}{2}=y-3=z$ உடன் கோணங்கள் $60°$ பிறப்பிக்கும் இரு கோடுகள் ஆதி வழியாகச் செல்லுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகள் யாவை?

19. தளம் $8x+2y+9z=1$ இல் $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ என்ற நேர்க்கோட்டின் குத்து வீழலுக்குரிய சமன்பாடுகளை அறிக.

20. தளம் $3x+2y+z=0$ இல் நேர்க்கோடு $3x-y+2z-1=0$, $x+2y-z-2=0$ இன் குத்து வீழலுக்குரிய சமன்பாடுகள் யாவை?

மேலும், புள்ளி $(-1, 1, 1)$ குத்து வீழலின் மேல் அமைந்தால், அதன் சமன்பாடுகளைச் சமச் சீரான வடிவத்தில் தருக.

21. $P(a, b, c)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து நேர்க்கோடுகள் $y=2x, \quad z=1$; $y=-2x, \quad z=-1$ க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் PA, PB வரையப்படுகின்றன. A, B இன் ஆய எண்களைக் கணக்கிடு. மேலும், $\widehat{APB}$ செங்கோணமாக இருக்கும்படி P நகர்ந்தால் அப்புள்ளியின் இயங்குவரை $12x^2-3y^2+25z^2=25$ என நிறுவுக.

22. $P(5, 4, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து நேர்க்கோடு $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{9}=\frac{z}{5}$ க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடு. இக்கோடு ஆதியையும் P ஐயும் சேர்க்கும் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தையும் கண்டுபிடி.

23. புள்ளி $(4, 1, 1)$ இலிருந்து நேர்க்கோடு $x+y+z=4$, $x-2y-z=4$ க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் என்ன ?

24. நேர்க்கோடு $\frac{1}{2}(x-1)=-y-1=\frac{1}{4}(z-3)$ அமைந்த தளம் $x+2y+z=12$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளதெனில், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

கொடுக்கப்பட்ட தளத்தில் நேர்க்கோட்டிற்குரிய குத்து வீழலின் திசைக் கொசைன்களையும் உய்த்தறிக.

25. நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2k}=\frac{z-3}{2}$; $\frac{x-1}{3k}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{-5}$ செங்குத்தாக அமைய வேண்டுமென்றால், k இன் மதிப்பு என்ன ?

26. நேர்க்கோடுகள் $3x+2y+z-5=0=x+y-2z-3$; $8x-4y-4z=0=7x+10y-8z$ செங்குத்தாக அமைகின்றன என்று காட்டுக.

27. புள்ளிகள் $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ ஐச் சேர்க்கும் கோடு, புள்ளிகள் $(-2, -3, 6)$, $(4, 0, -3)$, $(0, -1, 2)$ வழியாகச் செல்லும் தளத்திற்குச் செங்கோடாக அமையுமென நிறுவுக.

28. பின் வருவனவற்றைக் காண்க :

(i) புள்ளி $(-2, 2, -3)$ இலிருந்து நேர்க்கோடு $x-3=\frac{1}{2}(y+1)=-\frac{1}{4}(z-4)$ க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு.

(ii) ஆதியிலிருந்து நேர்க்கோடு $x+2y+3z+4=0=2x+3y+4z+5$ க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு.

இச் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளையும் காண்க.

29. நேர்க்கோடு $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ வழிச் செல்லும் தளம் $\frac{x}{l'}=\frac{y}{m'}=\frac{z}{n'}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகுமென்றால், அதன் சமன்பாடு $\Sigma(x-\alpha)\ (mn'-m'n)=0$ என்று காட்டுக.

30. சமன்பாடுகள் $ax+by+cz=0$; $yz+zx+xy=0$ ஆல் குறிக்கப்படும் இரு நேர்க்கோடுகள் செங்குத்தாக அமையுமெனில்; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ என நிறுவுக.

31. நேர்க்கோடுகள் $x=ay+b,\ z=cy+d$; $x=a'y+b',\ z=c'y+d'$ செங்குத்தாக அமைந்தால், $aa'+cc'+1=0$ என்று காண்பி.

32. புள்ளி (f, g, h) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு, தளம் $lx+my+nz=0$ க்கு இணையாக அமைந்து நேர்க்கோடு $ax+by+cz+d=0,\ a'x+b'y+c'z+d'=0$ ஐச் சந்திக்குமெனில், அதன் சமன்பாடுகள் யாவை ?

33. $P\ \equiv ax+by+cz+d=0$; $P'\ \equiv\ a'x+b'y+c'z+d'=0$; $\pi\ \equiv\ lx+my+nz=0$ என்ற சமன்பாடுகள் தரப்பட்டுள்ளன. சமன்பாடுகள் $P=\alpha\pi,\ \pi=\beta$ (α, β எவையேனுமிரு மாறிலிகள்) என்பவைகளைத் தனித்தனியாகவும், சேர்த்தும் ஆராய்க. புள்ளி $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு $\pi=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக இருப்பதுடன், $P=P'=0$ என்ற கோட்டோடு ஒரே தளத்தில் அமையுமென்றால், அதன் சமன்பாடுகள் $\frac{P}{P'}=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}$, $\pi=lx_1+my_1+nz_1$ எனக் காட்டுக.

அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$ எனில்,

மேற்கண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{bc'-b'c} = \frac{y-y_1}{ca'-c'a} = \frac{z-z_1}{ab'-a'b}$$

என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் என்றும் நிறுவுக.

34. நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$; $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ ஒரே தளத்தில் அமைந்தால், $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+d}{al+bm+cn} = \frac{a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+d'}{a'l+b'm+c'n}$ எனக் காட்டுக.

35. நேர்க்கோடுகள் $ax+by+cz+d=0=a'x+b'y+c'z+d'$; $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0=\alpha'x+\beta'y+\gamma'z+\delta'$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமைந்தால்,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக.

36. நேர்க்கோடுகள் $x=ay+b=cz+d$; $x=\alpha y+\beta=\gamma z+\delta$ ஒரே தளத்தில் அமையுமென்றால், $(\gamma-c)(a\beta-b\alpha)-(\alpha-a)(c\delta-d\gamma)=0$ எனக் காண்பி.

37. பின்வரும் நேர்க்கோட்டுச் சோடிகளில் மீச்சிறு தொலைவு கணக்கிட்டு, அது அமைந்த கோட்டின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

(i) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$; $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$

(ii) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{1}$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z+2}{2}$

38. நேர்க்கோடுகள் $x+a=2y=-12z$; $x=y+2a=6z-6a$ ஆகியவற்றிடையேயுள்ள மீச்சிறு தொலைவு $2a$ எனக் காட்டுக.

39. தளங்கள் $y+z=0$, $z+x=0$, $x+y=0$, $x+y+z=a$ ஆல் உருவாக்கப்பட்ட நான்முகியில் எவையேனும் இரு எதிர் விளிம்புகளுக்கு இடையேயுள்ள மீச்சிறு தொலைவு $2a/\sqrt{6}$ எனக்காட்டி, மீச்சிறு தொலைவு அமைந்த மூன்று கோடுகளும் புள்ளி $x=y=z=-a$ இல் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

40. z அச்சுக்கும், $ax+by+cz+d=0 = a'x+b'y+c'z+d'$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள மீச்சிறு தொலைவு

$$\frac{dc'-d'c}{\sqrt{(ac'-a'c)^2+(bc'-b'c)^2}}$$ எனக் காட்டுக.

41. நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{1}$; $y-mx=z=0$ சந்திக்குமெனில், m இன் மதிப்பு என்ன ?

42. பின்வரும் தளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் வகையினை ஆராய்க.

(i) $2x+3y-z=2,\ 3x+3y+z-4=0,\ x-y+2z-5=0$

(ii) $4x+3y+2z+7=0,\ 2x+y-4z+1=0,\ x-7z-2=0$

(iii) $x-z-1=0,\ x+y-2z-3=0,\ x-2y+z-3=0$

43. $y=mx,\ z=c$; $y=-mx,\ z=-c$ என்ற நேர்க்கோடுகளையும் X அச்சையும் வெட்டுங் கோட்டின் இயங்குவரை $mxz=cy$ என நிறுவுக.

44. நேர்க்கோடுகள் $x=4a,\ y+2z=0$; $x+4a=0,\ y=2z$; $y=4a,\ x=2z$ ஐச் சந்திக்கும் கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் மேற்பரப்பு $x^2+y^2-4z^2=16a^2$ எனக் காட்டுக.

45. நேர்க்கோடுகள் $y-z=1,\ x=0$; $z-x=1,\ y=0$; $x-y=1,\ z=0$ ஆகியவற்றைச் சந்திக்கும் கோட்டின் இயங்குவரை $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx=1$ என நிறுவுக.

46. இரு நிலைத்த வெட்டாச் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு மாறுங் கோட்டின் மேல் மாறுத நீளமுடைய துண்டை வெட்டினுல், அத்துண்டின் நடுப்புள்ளி ஒரு வட்டத்தின் மேல் அமையுமெனக் காட்டுக.

47. கொடுத்த இரு வெட்டாக் கோடுகளுக்கு ஒரு மாறும் புள்ளியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகள் செங்கோணத்தை உடையனவாக அமைந்தால், அப்புள்ளியின் இயங்குவரை யாது ?

48. நேர்க்கோடுகள் $y-mx=0=z-c$; $y+mx=0=z+c$ ஆகியவற்றிலிருந்து சம தொலைவில் உள்ள புள்ளியின் இயங்குவரை $mxy+(1+m^2)\,cz=0$ என நிறுவுக,

4. ஆய எண்களின் நிலேமாற்றம்
(Transformation of Co-ordinates)

4·1. ஆதிமாற்றம் : ஆய அச்சுகளின் திசையை மாற்ருமல் ஆதியை இடமாற்றம் செய்தல்

$O'(x_1, y_1, z_1)$ புதிய ஆதியாகவும், P எனும் மாறும் புள்ளியின் பழைய, புதிய நடப்பு ஆய எண்கள் (Current Co-ordinates முறையே (x, y, z); (X, Y, Z) ஆகவுங் கொண்டால் பின்வரும் நிலேமாற்றத் திட்டத்தை அறிவோம்.

$$x = x_1 + X; \quad y = y_1 + Y; \quad z = z_1 + Z$$

இந்த நிலேமாற்றத்தை அச்சுகளின் இடப் பெயர்ச்சி (Translation of axes) என அழைக்கின்ருேம்.

4·2. அச்சுகள் மாற்றம் : ஆதியை மாற்ருமல் அச்சுகளின் திசையை மாற்றுதல் (இரு அச்சுத் தொகுதிகளும் செவ்வகமானவை.)

புதிய அச்சுகள் $0\xi, 0\eta, 0\zeta$ எனக் குறிக்கப்படுவதாக. பழைய அச்சுகளேப் பொருத்து. இவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே (l_1, m_1, n_1); (l_2, m_2, n_2); (l_3, m_3, n_3) என்ருகுக.

இந்த இரு ஆயமுறைகளிலும் P என்ற ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x; y, z)$, (ξ, η, ζ) என்க.

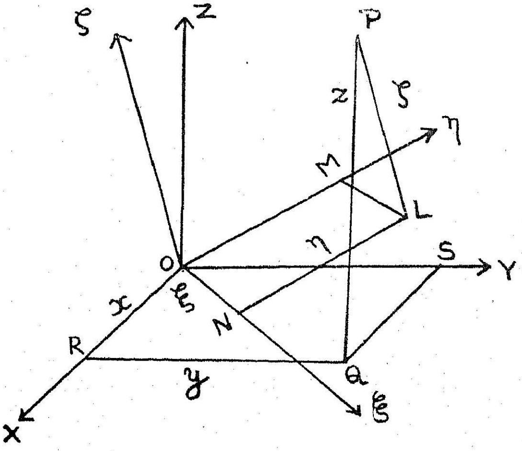
படத்தில் OR, RQ, QP முறையே x, y, z ஐக் குறிக்கின்றன. ON, NL, LP முறையே ξ, η, ζ ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன. பழைய ஆய எண்களுக்கும், புதியவைகளுக்கும் உள்ள தொடர்புகளே ஆராய்வோம்.

OX இன் மேல் OP இன் குத்துவீழல் $=$ OX இன்மேல் ON, NL, LP ஆகியவற்றின் குத்துவீழல்களின் கூடுதல்.

$$\therefore \quad x = l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta$$

இவ்வாறே OY, OZ இன்மேல் OP இன் குத்து வீழல்களை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$y = m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta$$
$$z = n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta$$



படம் 36

இதேபோல, $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ என்ற அச்சுகளின்மேல் OP இன் குத்து வீழல்களை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\xi = l_1x + m_1y + n_1z$$
$$\eta = l_2x + m_2y + n_2z$$
$$\zeta = l_3x + m_3y + n_3z$$

இந்த நிலைமாற்றங்கள் பின்வரும் அட்டவணையின்படி தெளிவாக விவரிக்கப்படுகின்றன.

	x	y	z
ξ	l_1	m_1	n_1
η	l_2	m_2	n_2
ζ	l_3	m_3	n_3

இந்த நிலைமாற்றத்தையே அச்சுகளின் சுழற்சி (**Rotation of axes**) என அழைக்கின்றோம். மேற்கண்ட நிலைமாற்றத் திட்டங்களில், தொடர்புகள் யாவும் மாறிகளின் முதற்படியில் அமைவதால், கொடுத்த சமன்பாடுகளை மாற்றும்போது படி மாற்றம் ஏற்படாது. ஆகவே ஒருபடிச் சமன்பாடு ஒரு படியிலும், இருபடிச் சமன்பாடு இரு படியிலுமே அமைகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு இரு ஆய முறைகளிலுமே ஒரு படியில் இருக்கின்றதென அறியலாம்.

4·3. ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாய் உள்ள மூன்று நேர்க்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகள்

0ξ, 0η, 0ζ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள். OX, OY, OZ ஆகிய அச்சுகளைப் பொருத்து அவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் முறையே (l_1,m_1,n_1); (l_2, m_2, n_2); (l_3, m_3, n_3) ஆவன.

ஆகவே, பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+m_1^2+n_1^2&=1\\ l_2^2+m_2^2+n_2^2&=1\\ l_3^2+m_3^2+n_3^2&=1\end{aligned}\right\} -(A) \qquad \left.\begin{aligned} l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2&=0\\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3&=0\\ l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1&=0\end{aligned}\right\} -(B)$$

அதேபோல் OX, OY, OZ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள். அச்சுகள் $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ ஐப் பொருத்து அவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் (l_1, l_2, l_3); (m_1, m_2, m_3); (n_1, n_2, n_3) ஆகும்.

எனவே, பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+l_2^2+l_3^2&=1\\ m_1^2+m_2^2+m_3^2&=1\\ n_1^2+n_2^2+n_3^2&=1\end{aligned}\right\} -(C) \qquad \left.\begin{aligned} l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3&=0\\ m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3&=0\\ n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3&=0\end{aligned}\right\} -(D)$$

இந்த நான்கு தொடர்புக் கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சாராதவையல்ல. தொடர்புகள் C, D ஐ A, B ஆகியவற்றிலிருந்து இயற்கணித முறைப்படி பெற முடியும்.

மேலும் தொடர்புகள் $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$,

$l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0$ ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l_1}{m_2n_3-m_3n_2}=\frac{m_1}{n_2l_3-n_3l_2}=\frac{n_1}{l_2m_3-l_3m_2}$$

$$=\frac{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}{\sqrt{\Sigma(m_2n_3-m_3n_2)^2}}$$

$$=\frac{\pm 1}{\sin 90^\circ}$$

$$=\pm 1$$

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகளில் ஒன்றின் திசைக் கொசைன்களை மற்றிரு கோடுகளின் திசைக்கொசைன்களைக் கொண்டு கணக்கிட முடியும் என்று அறிகிறோம்.

மேலும், $\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = l_1(m_2n_3-m_3n_2)+m_1(n_2l_3-n_3l_2)+n_1(l_2m_3-l_3m_2)$

$$=\pm(l_1^2+m_1^2+n_1^2)$$
$$=\pm 1$$

4·4. ஒரு தளத்தால் உண்டாகும் ஒரு மேற்பரப்பின் வெட்டு முகத்தை ஆராய்தல் (Section of a surface by a plane)

மேற்பரப்பை வெட்டுந் தளம் ஆதி வழியாகச் செல்லுமெனில் பின்வரும் நிலைமாற்றம் அதிகப் பயனுள்ளதாக அமையும்.

தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=0$ எனவும், $l^2+m^2+n^2=1$ $(n>0)$ எனவுங் கொள்க.

ஆதியில் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடான $O\zeta$ ஐ ஓர் அச்சாகக் கொள்க. அது OZ உடன் ஒரு குறுங்கோணத்தை உண்டாக்குவதாக. பழைய அச்சுகளைப் பொருத்து, $O\zeta$ இன் சமன் பாடுகள் $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ஆகும்.

மற்றொரு அச்சான $O\eta$ ஐ ζOZ தளத்தில் $O\zeta$ வுக்குச் செங் குத்தாகவும், OZ உடன் குறுங்கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும்படி யாகவும் எடுத்துக் கொள்க. மூன்றுவது அச்சான $O\xi$ ஐ ζOZ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக எடுத்துக் கொள்க. கொடுத்த தளமானது $\xi O \eta$ ஆகும். $O\xi$, அச்சுகள் $O\eta$, $O\zeta$ க்குச் செங் குத்தாக இருப்பதால், அது ζOZ என்ற தளத்தில் அமைந்த OZ க் கும் செங்குத்தாக இருக்கும். ஆகவே $O\xi$ என்பது XOY தளத்தில்

அமைவதுடன், கொடுத்த தளமும் XOY தளமும் வெட்டுங் கோடாகவும் இருக்கின்றது.

$\zeta O \eta$ என்ற தளத்தில் OZ அமைவதால் அதன் சமன்பாடு $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m}$ ஆகும்.

$O\eta$ இன் திசைக் கொசைன்கள் (λ, μ, γ) எனில்,

$$l\lambda + m\mu + n\gamma = 0$$
$$m\lambda - l\mu + 0\cdot\gamma = 0$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mu}{m} = \frac{\gamma}{\dfrac{l^2+m^2}{-n}} = \frac{\pm 1}{\dfrac{\sqrt{l^2+m^2}}{n}}$$

$O\eta$ ஆனது OZ உடன் குறுங்கோணத்தை உண்டாக்குவதால், γ நேராகும்.

$$\therefore \lambda = \frac{-ln}{\sqrt{l^2+m^2}};\ \mu = \frac{-mn}{\sqrt{l^2+m^2}};\ \gamma = \sqrt{l^2+m^2}$$

கோடுகள் $O\zeta$, $O\eta$ க்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால், $O\xi$ இன் திசைக் கொசைன்கள் $(n\mu - m\gamma,\ l\gamma - n\lambda,\ m\lambda - l\mu)$ ஆகும்.

$$i.e.,\ \left(\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}};\ \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\ 0 \right)$$

ஆகவே பின்வரும் நிலைமாற்றத் திட்டம் கிடைக்கின்றது.

	x	y	z
ξ	$\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$	0
η	$\frac{-ln}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\frac{-mn}{\sqrt{l^2+m^2}}$	$\sqrt{l^2+m^2}$
ζ	l	m	n

நிலைமாற்றத்திற்குரிய வாய்பாடுகளாவன :

$$x = -\frac{m\xi + nl\eta}{\sqrt{l^2+m^2}} + l\zeta$$

$$y = \frac{l\xi - mn\eta}{\sqrt{l^2+m^2}} + m\zeta$$

$$z = \sqrt{(l^2+m^2)}\,\eta + n\zeta$$

இப் புதிய ஆயமுறையில் கொடுக்கப்பட்ட தளத்தின் சமன்பாடு $\zeta = 0$ ஆகும்.

4·5. செவ்வக அச்சுகளின் எந்த நிலைமாற்றத்திலும் கோவை $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ க்கு $a+b+c$, $f^2+g^2+h^2-bc-ca-ab$ ஆகியவை மாற்றமிலிகள் (Invariants) எனக் காட்டலாம்.

செவ்வக அச்சுகளின் சுழற்சியினால் கோவை $x^2+y^2+z^2$ ஒருவித மாற்றமும் அடைவதில்லை என்பதை அறிவோம்.

ஆகவே, கோவை $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy-\lambda(x^2+y^2+z^2)$ என்பது பின்வருமாறு மாறுதலடையும் :

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy-\lambda(x^2+y^2+z^2)$. இவ்விரு கோவைகளும் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகக் குறிக்கப்பட்டு சமன்பாடுகளாகும்போது, λ இன் ஒரே மதிப்பிற்கு ஒரு சோடித் தளங்களைக் குறிக்கும் என்பதை அறியலாம்.

ஆகவே சமன்பாடுகள்

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ b & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} A-\lambda & H & G \\ H & B-\lambda & F \\ G & F & C-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ஆகியவை சர்வ சமமானவை.

i. e., $\lambda^3-\lambda^2(a+b+c)+\lambda(bc+ca+ab-f^2-g^2-h^2)-(abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2)=0$

$\lambda^3-\lambda^2(A+B+C)+\lambda(BC+CA+AB-F^2-G^2-H^2)-(ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CH^2)=0$

அதாவது இவ்விரு முப்படிச் சமன்பாடுகளும் சர்வ சமமானவை.

$$\therefore \quad a+b+c=A+B+C\ ;$$

$$ab+bc+ca-f^2-g^2-h^2=AB+BC+CA-F^2-G^2-H^2\ ;$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=ABC+2FGH-AF^2-BG^2-CA^2$$

இவை சமன்பாட்டின் மாற்றமிலிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

பயிற்சி 4

1. OA, OB, OC ஆகியவை ஆதி வழியாகச் செல்லும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள். அவற்றின் திசைக் கொசைன்கள் (l_1, m_1, n_1) ; (l_2, m_2, n_2); (l_3, m_3, n_3) ஆவன. $OA=OB=OC=a$ எனில், தளம் ABC இன் சமன்பாடு $(l_1+l_2+l_3)\,x+(m_1+m_2+m_3)\,y+(n_1+n_2+n_3)\,z=a$ எனக் காட்டு.

2. இருவிதச் செவ்வக அச்சு முறைகள் ஒரே ஆதியை உடையனவாயிருக்கின்றன. ஒரு தளம் இவ்வச்சுகளை ஆதியிலிருந்து முறையே (a, b, c) ; (a', b', c') என்ற தொலைவுகளில் வெட்டுகின்றதென்றால்,
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{c'^2}$$ என நிறுவுக.

3. ஒரே ஆதியையுடைய இரு செவ்வக அச்சு முறைகளில் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றிற்கு ஆய எண்கள் மாற்றப்படுமெனில், $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்ற சமன்பாட்டில் $a+b+c$, $u^2+v^2+w^2$ என்ற கோவைகளின் மதிப்பு மாருதவை எனக் காட்டுக.

4. $ax^2+by^2=2z$ என்ற மேற்பரப்பில் $lx+my+nz=p$ என்ற தளம் உண்டாக்கும் குறுக்குவெட்டு ஒரு செவ்வக அதிபர வளைவாக அமைய நிபந்தனையைக் காண்க.

5. x, y, z அச்சுகள் செவ்வகமானவையெனில்,
$$x+\frac{\xi}{\surd 3}+\frac{\eta}{\surd 2}+\frac{\zeta}{\surd 6}\ ;\ y=\frac{\xi}{\surd 3}-\frac{2\,\zeta}{\surd 6}\ ;$$
$$z=\frac{\xi}{\surd 3}-\frac{\eta}{\surd 2}+\frac{\zeta}{\surd 6}$$

ஆகிய சமன்பாடுகளால் கிடைக்கும் நிலைமாற்றத்தில் மற்றொரு செவ்வக அச்சுமுறை பெறப்படுகிறதென்றும், இதில் $x+y+z=0$ என்ற தளம், $\xi=0$ என்று மாறுகின்றதெனவும் நிறுவுக. ஆகவே, தளம் $x+y+z=0$, மேற்பரப்பு $yz+zx+xy+a^2=0$ ஐ $\sqrt{2}\,a$ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தில் வெட்டும் என்று காண்பி.

6. மேற்பரப்பு $yz+zx+xy+a^2=0$ ஐத் தளம் $lx+my+nz=p$ ஒரு பரவளைவில் வெட்டுமெனில், $\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n}=0$ என நிறுவுக.

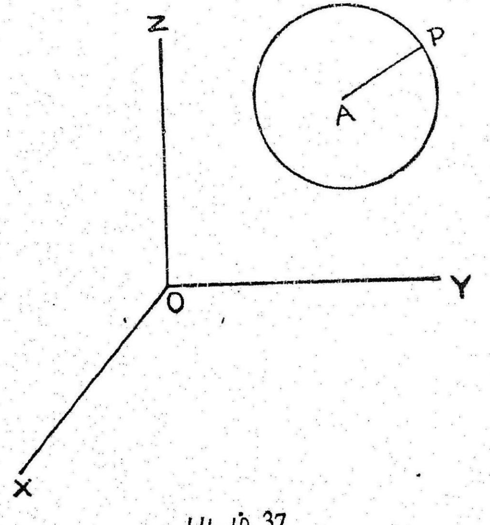
5. கோளம்

(Sphere)

வரையறை

ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து மாறுத தொலைவில் அமைந்த ஒரு மாறும் புள்ளியின் இயங்கு வரையே கோளமாகும். நிலைத்த புள்ளி கோளத்தின் மையமெனவும், மாறுத தொலைவு அதன் ஆரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

5·1. புள்ளி (a, b, c) ஐ மையமாகவும், r ஐ ஆரமாகவுங் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல்



படம் 37

$P(x, y, z)$ கோளத்தின் மேலமைந்த ஒரு புள்ளியாகுக.

$AP^2 = r^2$

அதாவது, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ —— (1)

இதுவே கோளத்தின் தேவையான சமன்பாடு.

குறிப்பு: மையமானது ஆதியோடு ஒன்றுபடுமெனில், சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் அமைகின்றது.

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \text{———} (2)$$

இது கோளச் சமன்பாட்டின் திட்டமான வடிவம் (**Standard form**) எனப்படும்.

5·2. பொது வடிவத்தில் உள்ள கோளத்தின் சமன்பாடு

சமன்பாடு (1) இலிருந்து,

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+(a^2+b^2+c^2-r^2)=0$$

இதைப் பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதலாம்:

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

இதுவே கோளத்தின் பொதுச் சமன்பாடு எனப்படும்.

இச்சமன்பாட்டை மாற்றி அமைத்தால்,

$(x+u)^2+(y+v)^2+(z+w)^2=u^2+v^2+w^2-d$ என்றாகும்.

சமன்பாடு (1) உடன் ஒப்பிடும் போது,

புள்ளி $(-u,-v,-w)$ கோளத்தின் மையமாகவும், கோவை $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ கோளத்தின் ஆரமாகவும் கிடைக்கின்றன. ஆரம் மெய்யாக இருக்கவேண்டுமெனில், $u^2+v^2+w^2-d > 0$.

அதாவது, $d < u^2+v^2+w^2$ ஆகும்.

5·3. மாறிகள் x, y, z இல் இருபடியில் உள்ள பொதுவான சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்க நிபந்தனைகளை அறிதல்

பொதுவான சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$$

என்பதே.

இதை முந்தைய உட்பிரிவில் உள்ள கோளத்தின் பொதுச் சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டால் பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(i) x^2, y^2, z^2 என்பவையின் கெழுக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். அதாவது, $a=b=c$.

(ii) yz, zx, xy என்ற உறுப்புகளில் கெழுக்கள் பூச்சிய மாக வேண்டும். அதாவது, $f=g=h=0$.

ஆகவே, இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்கும் போது,

$$ax^2+ay^2+az^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad (a \neq 0)$$ என்றுகின்றது.

பொதுத் தன்மையை இழக்காமல், a ஐ ஒன்றுக்குச் சமமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஏனெனில், நெடுகிலும் a ஆல் வகுக்க, சமன்பாடு, $x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$ என்ற வடிவத் தில் அமைகின்றது.

குறிப்பு : கோளத்தின் சமன்பாட்டில் u, v, w, d என்ற நான்கு மாறிலிகள் இருப்பதால், கோளத்தைத் தீர்மானிக்க நான்கு நிபந்தனைகள் தரப்பட வேண்டும் என்பது தெளிவா கின்றது.

5·4. ஒரே தளத்தில் அமையாத நான்கு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டை அறிதல்

கோளத்தின் சமன்பாட்டைப் பொதுவடிவத்தில் எடுத்துக் கொள்க.

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \text{———} (1)$$

கொடுத்த நான்கு புள்ளிகள் (x_k, y_k, z_k) $(k=1, 2, 3, 4)$ என்க. கோளம் இப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதால், பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d=0 \text{ ——— } (2)$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+2ux_2+2vy_2+2wz_2+d=0 \text{ ——— } (3)$$
$$x_3^2+y_3^2+z_3^2+2ux_3+2vy_3+2wz_3+d=0 \text{ ——— } (4)$$
$$x_4^2+y_4^2+z_4^2+2ux_4+2vy_4+2wz_4+d=0 \text{ ——— } (5)$$

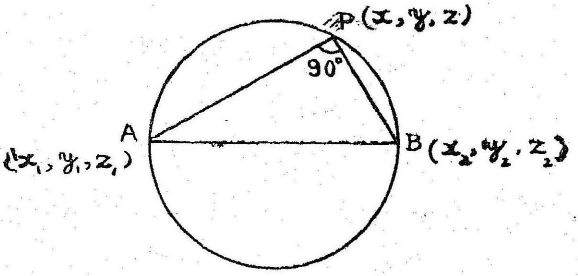
இந்த ஐந்து சமன்பாடுகளிலிருந்து u, v, w, d என்ற மாறிகளை நீக்கினால்,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட நான்கு புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாடு.

5·5. கொடுத்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டை அறிதல்

கொடுத்த புள்ளிகள் $A\ (x_1, y_1, z_1)$ $B\ (x_2, y_2, z_2)$ எனக் கொள்க. கோளத்தின்மேல் $P\ (x, y, z)$ ஏதாவதொரு புள்ளி யாகுக.



படம் 38

AP இன் திசைத் தகவுகள் $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ ஆவன.

BP இன் திசைத் தகவுகள் $(x-x_2, y-y_2, z-z_2)$ ஆவன.

கோளத்தின் மேல் P இன் எல்லா நிலைகளுக்கும் (positions), $\widehat{APB}=90°$.

ஆகவே, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$

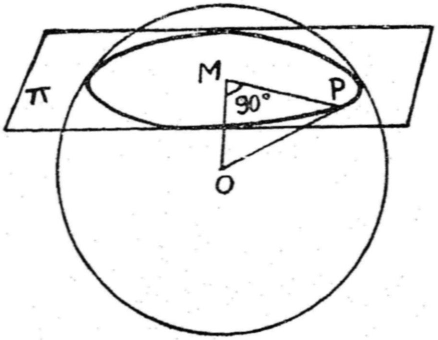
இதுவே கோளத்தின் தேவையான சமன்பாடாகும்.

5·6 ஒரு கோளமும் ஒரு தளமும் வெட்டிக் கொள்ளுதல்

O கோளத்தின் மையமாகவும் R அதன் ஆரமாகவும் கொள்க. π வெட்டுந்தளமாக இருக்கட்டும்.

π க்கு OM என்ற செங்கோடு வரையப்படுகின்றது. கோளமும் தளமும் வெட்டும் வளைவரை (curve of intersection) யில் புள்ளி P ஐ எடுத்துக் கொள்க.

OM தளத்திற்கு வரையப்பட்ட செங்கோடாகையால், தளத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் OM செங்குத்தாக இருக்கும்.



படம் 39

$$\therefore \quad O\hat{M}P = 90^\circ$$

$\triangle$ OMP இலிருந்து,

$$MP^2 = OP^2 - OM^2$$

$$i.e., \quad MP = \sqrt{R^2 - OM^2} \quad (\because \; OP = R)$$

O கோளத்தின் மையமாகையால் ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். OM கொடுத்த தளத்தின் மேல் வரையப்பட்ட செங்கோடாகையால், M ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். ஆகவே, OM ஒரு மாறிலியாகும்.

$$\therefore \quad MP = \text{ஒரு மாறிலி}$$

அதாவது, ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து தளத்தில் அமைந்த மாறும் புள்ளியான P இன் தொலைவு மாறாததாக இருப்பதால், P இன் இயங்குவரை ஒரு வட்டமேயாகும்.

எனவே, கோளமும் தளமும் ஒரு வட்டத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன.

குறிப்பு : இந்த வட்டத்தின் ஆரம் கோளத்தின் ஆரத்தை விடக் குறைவாக இருப்பின், இது சிறு வட்டம் (small circle) என அழைக்கப்படும்.

இதன் ஆரம் கோளத்தின் ஆரத்திற்குச் சமமாக இருப்பின், இது பெரு வட்டம் (great circle) என அழைக்கப்படும்.

5·7. வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

ஒரு கோளமும் ஒரு தளமும் வட்டத்தில் வெட்டிக்கொள்ளு வதால், வட்டத்தைக் குறிக்க இரு சமன்பாடுகள் தேவைப் படுகின்றன. அவைகளாவன கோளம், தளம் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளேயாம்.

கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vz+2wz+d=0$ எனவும், தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=p$ எனவும் தரப்பட் டிருப்பின், இவை இரண்டும் சேர்ந்தே வட்டத்தின் சமன்பாடு களாகக் கருதப்படும்.

இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று வட்டத்தில் வெட்டிக் கொள்ளுவதால், இவற்றின் இரு சமன்பாடுகளும் சேர்ந்தே வட்டத்தின் சமன்பாடுகளாகக் கருதப்படும்.

5·8. கொடுத்த வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளங்கள்

வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$$S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \text{———} (1)$$

$$U\equiv lx+my+nz-p=0 \text{———} (2)$$

எனக் கொள்க.

பின்வரும் சமன்பாட்டை ஆராய்வோம்.

$$S+\lambda U=0 \text{———} (3)$$ (λ யாதானுமொரு மாறிலி)

சமன்பாடு (3) ஒரு கோளத்தையே குறிக்கின்றது. சமன் பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றில் பொருந்தும் x, y, z இன் மதிப்புக்கள் சமன்பாடு (3)லும் பொருந்துவதால், கொடுக்கப் பட்ட கோளத்திற்கும் தளத்திற்கும் பொதுவான புள்ளிகள் சமன்பாடு (3) ஆல் குறிக்கப்படும் கோளத்தின் மேலும் அமை கின்றன. அதாவது, கொடுத்த வட்டத்தின் வழியே செல்லும் ஒரு கோளத்தையே இச்சமன்பாடு குறிக்கின்றது. λ யாதானு மொரு மாறிலியாக இருப்பதால், அதன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு ஏற்ப இச் சமன்பாடு கொடுத்த வட்டத்தின் வழியே செல்லும் எல்லாக் கோளங்களையும் தருகின்றது. இவ்விதமாக, இந்த வட்டத்தின் வழியே செல்லும் கோளங்களின் எண்ணிக்கை முடிவிலாதது என்பதை அறியலாம்.

குறிப்பு: மேற்கண்ட வட்டம் இரு கோளங்களின் வெட்டும் வளைவரையாகத் தரப்படுமெனில், கோளங்களின் சமன்பாடுகளை $S_1=0$; $S_2=0$ எனக் கொள்க.

சமன்பாடு $S_1+kS_2=0$ (k யாதானுமொரு மாறிலி), k இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு இந்த வட்டத்தின் வழியே செல்லும் கோளங்களையே குறிக்கும். இவ்விதமாக, கொடுக்கப்பட்ட கோளங்கள் வெட்டும் வளைவரை வழியாகச் செல்லும் எண்ணில்லாக் கோளங்களையும் பெறுகின்றோம்.

5·9. ஒரு நேர்க்கோடும் ஒரு கோளமும் வெட்டிக்கொள்ளுதல்

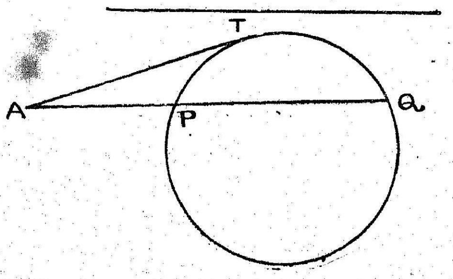
இவற்றின் சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்க.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \text{ ——— (i)}$$

$$S\equiv x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \text{ ——— (ii)}$$

நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனக.

நேர்க்கோட்டின் மேல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி $A(x_1, y_1, z_1)$ எனக.



படம் 40

நேர்க்கோடு கோளத்தை P, Q என்ற புள்ளிகளில் சந்திப்பதாகுக.

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r$ எனில், நேர்க்கோட்டின்மேல் அமைந்த பொதுவான புள்ளியின் ஆய எண்கள் (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr) என்ற வடிவத்தில் தரப்படுகின்றன. நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளி A இலிருந்து பொதுவான புள்ளியின் தொலைவே துணையலகு r ஆகும். புள்ளி (x_1+lr, y_1+mr, z_1+nr) கோளத்தின் மேல் அமையுமெனில், சமன்பாடு (ii), இவ்வாய எண்களால் திருப்தி செய்யப்படும்.

அதாவது,

$$(x_1+lr)^2+(y_1+mr)^2+(z_1+nr)^2+2u(x_1+lr)+$$
$$2v(y_1+mr)+2w(z_1+nr)+d=0$$

$$i.e., \quad r^2(l^2+m^2+n^2)+2r\{l(x_1+u)+m(y_1+v)+n(z_1+w)\}$$
$$+(x_1^2+y_1^2+z_1^2+\ldots\ldots+d)=0$$

(l, m, n) நேர்க்கோட்டின் திசைக் கொசைன்களாகையால், $l^2+m^2+n^2=1$ ஆகும்.

$S_1 \equiv x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ux_1+2vy_1+2wz_1+d$ எனக் குறிப்பிடுக.

மேற்கண்ட சமன்பாடு பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது :

$$r^2+2r\,[l(u+x_1)+m(v+y_1)+n(w+z_1)]+S_1=0 \text{———} (3)$$

இது r இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகையால், r க்கு இரு மதிப்புக்கள் (மெய்யானவையோ கற்பனையானவையோ) உண்டு. அவை A இலிருந்து நேர்க்கோடு கோளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் தொலைவுகளேயாகும். சமன்பாடு (3) இன் மூலங்கள் r_1, r_2 எனில்,

$AP=r_1$; $AQ=r_2$ ஆவன.

வரையறை

கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதன் வழியே செல்லும் கோளத்தின் வெட்டுக்கோடு (secant) கோளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் தொலைவுகளின் பெருக்கம் கோளத்தைப் பொருத்து கொடுத்த புள்ளியின் திறன் (Power of the point w. r. t. the sphere) எனக் கூறப்படும். இப்பெருக்கம் கொடுத்த புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் எல்லா வெட்டுக் கோடுகளுக்கும் மாறுததாயிருக்கும். இது அப்புள்ளியிலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டு நீளத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்.

படம் 40 இல்,

(கோளத்தைப் பொருத்து) A இன் திறன் $=AP.\,AQ$

$=r_1r_2$

$=S_1$ [சமன்பாடு (3) இல் மூலங்களின் பெருக்கம்]

AT கோளததிறகு வரைநத தொடுகோடெனில,

AT^2 = கோளததைப பொருதது A இன திறன (வரையறையின படி)

$= S_1$

$AT = \sqrt{S_1}$

குறிபபு. A, கோளததின உளளே அமைநதால, AT கறபனையானதாகும $S_1 < 0$

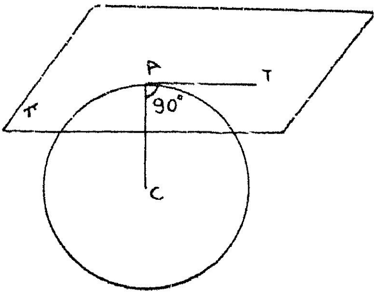
A, கோளததின மேல அமைநதால, $AT = 0$
$S_1 = 0$

A, கோளததின வெளியே அமைநதால, AT மெயயானதாகும $S_1 > 0$

எனவே, $S_1 \lesseqgtr 0$ ஆக இருபபதைப பொருதது, கொடுதத புளளி கோளததின உளளேயோ, கோளததின மேலோ அலலது வெளியேயோ அமைகினறதென அறியலாம

5 10. தொடுதளததின (Tangent plane) சமனபாட்டை அறிதல

$A(x_1, y_1, z_1)$ தொடு புளளியாகவும, $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ கோளததின சமனபாடாகவும கொளக.



படம 41

A இன வழியாகச செலலும நோககோட்டின திசைக கொசைனகள (l, m, n) எனறால, அதன சமனபாடுகள

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad \text{------} (1)$$

இக்கோட்டின் மேல் அமைந்த பொதுவான புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x_1+lr,\ y_1+mr,\ z_1+nr)$ என்பவையாகும். r, நேர்க் கோட்டில் A இலிருந்து பொதுப் புள்ளியின் தொலைவாகும்.

இப்புள்ளி கோளத்தின் மேல் அமையுமென்றால், r இல் பின் வரும் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

$$r^2+2r\ [l\ (u+x_1)\ +m\ (v+y_1)\ +n\ (w+z_1)]+\ S_1=0 \text{ —— } (2)$$

A இன் வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடு கோளத்தை A இல் தொடுவதால், இச்சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் பூச்சியத்திற் குச் சமமாகும்.

ஆகவே, $l(u+x_1)+m(v+y_1)+n(w+z_1)=0$;——— (3)

$$S_1=0 \text{ ——— } (4)$$

மேற்கண்ட நேர்க்கோட்டைப் போன்று, தொடர்பு (3) க்குட் பட்டு (l, m, n) ஆகியவற்றின் வெவ்வேறு மதிப்புக்களுக்குக் கிடைக்கும் நேர்க்கோடுகள் யாவும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. ஏனெனில், தொடர்பு (3) இன்படி இக்கோடு ஒவ்வொன்றும் A வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. இத்தளமே A இல் கோளத்திற்குரிய தொடுதளமாகும்.

சமன்பாடுகள் (1) க்கும், தொடர்பு (3) க்கும் இடையே l, m, n என்ற கணியங்களை நீக்க, தொடுதளத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

அதாவது, $(x-x_1)(u+x_1)+(y-y_1)(v+y_1)+(z-z_1)(w+z_1)=0$

i.e., $xx_1+yy_1+zz_1+ux+vy+wz=x_1^2+y_1^2+z_1^2+ux_1+vy_1+wz_1$.

இருபுறமும் $ux_1+vy_1+wz_1+d$ ஐக் கூட்டுக.

$xx_1+yy_1\ +zz_1+u\ (x+x_1)\ +v\ (y+y_1)\ +w\ (z+z_1)\ +d=S_1$ தொடர்பு (4) இன்படி இச் சமன்பாட்டின் வலப்புறம் பூச்சிய மாகும்.

ஆகவே தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$$

மரபின்படி,

$$T\equiv xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$$

எனவே இச்சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதப்படுகின்றது.

$$T=0.$$

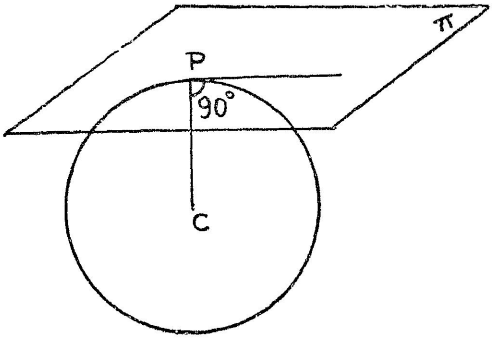
குறிப்பு கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2=r^2$ என்றால், புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இல் கோளத்தின் தொடுதளத்திற்குரிய சமன்பாடு $xx_1+yy_1+zz_1=r^2$ என்றாகும்.

5 11 கொடுத்த தளம் ஒரு கோளத்தைத் தொடும் நிபந்தனையைக் காணல்

தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=p$ எனவும்,

கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனவுங் கொள்க



படம் 42

கொடுத்த தளம் கோளத்தைத் தொடும் புள்ளி P என்க. கோளத்தின் மையம் C ஆகுக. C இன் ஆய எண்கள் $(-u, -v, -w)$ ஆகும். CP தொடுதளத்திற்குச் செங்கோடாக அமையும்.

$CP = C$ இலிருந்து தொடுதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளம்

$$= \frac{l(-u)+m(-v)+n(-w)-p}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

ஆனால் CP = கோளத்தின் ஆரம்

$$= \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$$

$$\therefore \frac{-(ul+vm+wn+p)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$$

ஆகவே, $(ul+vm+wn+p)^2=(l^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2-d)$

5·12. தொடுகைத் தளம் (Plane of contact)

புள்ளி (x_1, y_1, z_1) வழியாகக் கோளம் $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ க்குத் தொடுதளங்களின் தொடுபுள்ளிகள் அமையும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்தல்.

தொடுபுள்ளிகளில் ஒன்றை $P(x', y', z')$ என்க.

P இல் கோளத்திற்குரிய தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx'+yy'+zz'+u(x+x')+v(y+y')+w(z+z')+d=0$$

இத்தளம் கொடுத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லுமெனில், $x_1x'+y_1y'+z_1z'+u(x_1+x')+v(y_1+y')+w(z_1+z')+d=0$ ஆகும்.

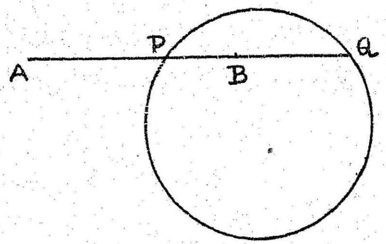
ஆகவே P இன் இயங்குவரை

$$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$$

இதுவே புள்ளி (x_1, y_1, z_1) க்குரிய தொடுகைத் தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

5·13. இசைத்தளம் (Polar Plane)

A என்ற நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோடு கோளத்தை P, Q என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.



படம் 43

PQ ஐப் பொருத்து A இன் இசைத் துணை (harmonic conjugate) B எனக் கொள்க.

வெட்டுக்கோடான APQ இன் நிலை மாறும்போது, B இன் இயங்குவரையே கோளத்தைப் பொருத்து A இன் இசைத்தளம் எனப்படும்.

A இன் ஆய எண்கள் (x_1, y_1, z_1) ஆகவும், கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ஆகவுங் கொள்க. வெட்-

டுக்கோடு APQ இன் மேல் $(AB, PQ) = -1$ ஆக இருக்குமாறு புள்ளி $B(x', y', z')$ ஐக் குறி. PQ ஐ A, B இசைபடப் பிரிப்பதால், AB ஐ P, Q உம் இசைபடப் பிரிக்கும் என்றறிவோம்.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + 2ux + 2vy + 2wz + d \quad (\text{என்க}).$$

AB ஐ $\lambda : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆய எண்கள் $\left(\frac{\lambda x'+x_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda y'+y_1}{\lambda+1}, \frac{\lambda z'+z_1}{\lambda+1}\right)$ ஆவன.

இப் புள்ளி கோளத்தின்மேல் அமைந்தால்,

$$\left(\frac{\lambda x'+x_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y'+y_1}{\lambda+1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda z'+z_1}{\lambda+1}\right)^2 + 2u\left(\frac{\lambda x'+x_1}{\lambda+1}\right) + 2u\left(\frac{\lambda y'+y_1}{\lambda+1}\right) + 2w\left(\frac{\lambda z'+z_1}{\lambda+1}\right) + d = 0$$

அதாவது, $\lambda^2 f(x', y', z') + 2\lambda[x_1x' + y_1y' + z_1z' + u(x_1+x') + v(y_1+y') + w(z_1+z') + d] + f(x_1, y_1, z_1) = 0$

இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாவன AB ஐ P, Q பிரிக்கும் விகிதங்களே. AB ஐ P, Q இசைபடப் பிரிப்பதால், இவ்விகிதங்கள் அளவில் சமமாகவும் குறியில் எதிராகவும் உள்ளன. எனவே, சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமான மதிப்புக்கள் உள்ளனவாயும் வெவ்வேறு குறிகளையுடையனவாயும் அமைகின்றன.

ஆகவே, மூலங்களின் கூடுதல் $= 0$

i. e., $x_1x' + y_1y' + z_1z' + u(x_1+x') + v(y_1+y') + w(z_1+z') + d = 0$.

$\therefore$ B இன் இயங்குவரை

$xx_1 + yy_1 + zz_1 + u(x+x_1) + v(y+y_1) + w(z+z_1) + d = 0$ ஆகும்.

இது x, y, z இல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், ஒரு தளத்தைக் குறிப்பதாகும். இத்தளமே கோளத்தைப் பொருத்து A இன் இசைத்தளமாகும். A இத்தளத்தின் இசைப் புள்ளி **(Pole)** எனப்படும்.

குறிப்பு : A இலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் தொடு புள்ளிகளும் இத் தளத்தில் அமைகின்றன. எனவே, கோளத்தைப் பொருத்து A இன் இசைத்தளம் அதன் தொடுகைத் தளமேயாகும்.

சமன்பாடு $T=0$ பின் வருபனவற்றைக் குறிக்கின்றது.

(i) புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இல் கோளத்தின் தொடுதளம்

(ii) புள்ளி (x_1, y_1, z_1) க்குரிய தொடுகைத்தளம்

(iii) கோளத்தைப் பொருத்து, புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இன் இசைத்தளம்

5·14. கொடுத்த கோளத்தைப் பொருத்து ஒரு தளத்தின் இசைப் புள்ளியைக் காணல்

கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனவும்,

தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=p$ எனவுங் கொள்க.

கோளத்தைப் பொருத்து தளத்தின் இசைப் புள்ளி $P(x_1, y_1, z_1)$ ஆகுக.

கோளத்தைப் பொருத்து P இன் இசைத்தளம்,

$xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d=0$ ஆகும்.

i.e., $(x_1+u)x+(y_1+v)y+(z_1+w)z+(ux_1+vy_1+wz_1+d)=0$.

கொடுத்த தளத்தின் சமன்பாடு,

$$lx+my+nz-p=0$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால், அவை முழுதும் ஒத்தவையாகும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1+u}{l}=\frac{y_1+v}{m}=\frac{z_1+w}{n}=\frac{ux_1+vy_1+wz_1+d}{-p}$$

இப் பின்னங்களிலிருந்து P இன் ஆய எண்களைக் கணக்கிட முடியும்.

5·15. துணையியப் புள்ளிகளும், துணையியத் தளங்களும் (Conjugate points and conjugate planes)

ஒரு கோளத்தைப் பொருத்து ஒரு புள்ளியின் இசைத்தளம் மற்றொரு புள்ளியின் வழியே செல்லுமெனில், இவ்விரு புள்ளிகளும் கோளத்தைப் பொருத்து, துணையியப் புள்ளிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு கோளத்தைப் பொருத்து ஒரு தளத்தின் இசைப்புள்ளி மற்ருெரு தளத்தில் அமையுமெனில், இவ்விரு தளங்களும் துணையியத் தளங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஒரு கோளத்தைப் பொருத்து ஒரு கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியின் இசைத் தளமும் மற்ருெரு கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமெனில், இவ்விரு கோடுகளும் கோளத்தைப் பொருத்து இசைக் கோடுகள் (Polar lines) எனக் கூறப்படுகின்றன.

5·16. தொடு கூம்பு (Tangent cone)

ஒரு கோளத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளியான A இலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் மேற்பரப்பில் அமைகின்றன. A இன் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் விட்டம் இக் கூம்பின் அச்சாகும். இக் கூம்பே A இலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கூம்பாகும்.

A இன் ஆய எண்கள் (x_1, y_1, z_1) ஆகவும், கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ஆகவும் கொள்க.

கோளத்திற்கு AB ஒரு தொடுகோடெனில், AB கோளத்தை இரு ஒன்றிய புள்ளிகளில் சந்திக்கும். ஆகவே 5·13 இல் உள்ள பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாக அமைகின்றன.

$$\lambda^2 f(x', y', z')+2\lambda[x_1x'+y_1y'+z_1z'+u(x_1+x')+v(y_1+y')+w(z_1+z')+d]+f(x_1, y_1, z_1)=0$$

இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியமாகும்.

$$f(x', y', z') \cdot f(x_1, y_1, z_1)=[x_1x'+y_1y'+z_1z'+u(x_1+x')+v(y_1+y')+w(z_1+z')+d]^2$$

ஆகவே, B இன் இயங்குவரை பின்வரும் மேற்பரப்பாகும்.

$$f(x, y, z) \cdot f(x_1, y_1, z_1)=[xx_1+yy_1+zz_1+u(x+x_1)+v(y+y_1)+w(z+z_1)+d]^2$$

இதுவே A இலிருந்து கோளத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கூம்பின் தேவையான சமன்பாடு.

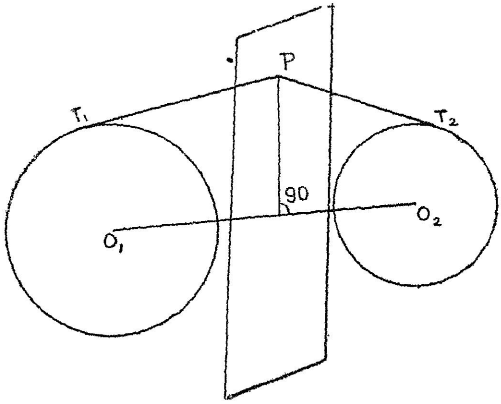
இச் சமன்பாட்டைக் குறியீட்டு முறையில், $SS_1 = T^2$ என எழுதலாம்.

5.17 சமத் தொடுகோட்டுத் தளம் (Radical plane)

இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்க.

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_1x+2v_1y+2w_1z+d_1=0$$
$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2+2u_2x+2v_2y+2w_2z+d_2=0$$

இக் கோளங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமமாக அமையும்படியாக, புள்ளி $P\ (x_1, y_1, z_1)$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.



படம் 44

PT_1, PT_2 தொடுகோடுகள் எனில்,

$$PT_1 = PT_2$$

அதாவது $PT_1^2 = PT_2^2$

i.e., $x_1^2+y_1^2+z_1^2+2u_1x_1+2v_1y_1+2w_1z_1+d_1$
$$=x_1^2+y_1^2+z_1^2+2u_2x_1+2v_2y_1+2w_2z_1+d_2$$

i.e., $2\,(u_1-u_2)\,x_1+2\,(v_1+v_2)\,y_1+2\,(w_1-w_2)\,z_1+d_1-d_2=0$

ஆகவே P இன் இயங்குவரை

$$2\,(u_1-u_2)\,x+2\,(v_1-v_2)\,y+2\,(w_1-w_2)\,z+d_1-d_2=0.$$

இது x, y, z இல் ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால் ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது. இத்தளமே கொடுத்த இரு கோளங்

களின் சமத் தொடுகோட்டுத் தளம் என அழைக்கப்படுகின்றது.

O_1, O_2 கோளங்களின் மையங்களென்றால், $O_1 O_2$ இன் திசைத் தகவுகள் $(u_1-u_2, v_1-v_2, w_1-w_2)$ என்பவையே. மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து $O_1 O_2$ சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமையுமென அறிகிறோம்.

இத்தளத்தின் சமன்பாட்டைக் குறியீட்டு முறையில், $S_1-S_2=0$ என எழுதலாம்.

மூன்று கோளங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்துக் கொள்ள, கிடைக்கும் மூன்று சமத் தொடுகோட்டுத் தளங்களும் ஒரு நேர்க் கோட்டின் வழியாகச் செல்லுகின்றன. இக்கோடு கோளங்களின் சமத் தொடுகோட்டுக்குரிய கோடு (radical line) எனப்படும்.

கோளங்களின் சமன்பாடுகள் $S_1=0$, $S_2=0$, $S_3=0$ என்றால், இக்கோட்டின் சமன்பாடுகள் $S_1=S_2=S_3$ ஆகும்.

நான்கு கோளங்களின் நான்கு சமத் தொடுகோட்டுக்குரிய கோடுகள் மூன்று மூன்றாக ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்புள்ளியிலிருந்து நான்கு கோளங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமமாக அமையும். இதுவே நான்கு கோளங்களின் சமத் தொடுகோட்டுப் புள்ளி (radical point) எனக் கூறப்படும்.

கோளங்களின் சமன்பாடுகள் $S_1=0, S_2=0, S_3=0, S_4=0$ எனில், இப்புள்ளியின் ஆய எண்கள் $S_1=S_2=S_3=S_4$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து கணக்கிடப்படும்.

குறிப்பு: (i) இரு கோளங்கள் வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் சமத்தொடுகோட்டுத் தளம் அவை வெட்டிக் கொள்ளும் வட்டமமைந்த தளமேயாகும்.

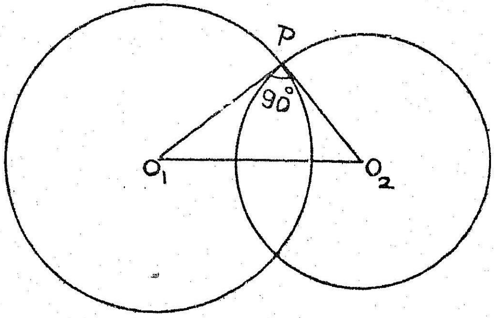
(ii) இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமெனில், அவற்றின் சமத்தொடுகோட்டுத் தளம் தொடுபுள்ளியில் அவற்றிற்குரிய பொதுத் தொடுதளமேயாகும்.

5·18. இரு கோளங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுதல் (orthogonal intersection of two spheres)

கோளங்களின் மையங்கள் O_1, O_2 எனவும், ஆரங்கள் r_1, r_2 எனவுங் கொள்க. அவை வெட்டிக் கொள்ளும் வட்டத்தின் மேல் ஒரு புள்ளி P ஐ எடுத்துக் கொள்க. P இல் கோளங்களுக்குரிய

தொடு தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோணமே இரு கோளங்களும் வெட்டிக்கொள்ளும்கோணமாகும். O_1P, O_2P தொடுதளங்களுக்குச் செங்கோடுகளாக இருப்பதால், இக்கோணம் $O_1\hat{P}O_2$ க்குச் சமமாக உள்ளது. இது ஒரு செங்கோணமாக இருப்பின், கோளங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுவதாகக் கூறப்படும். இப்படிப் பட்ட இரு கோளங்கள் செங்குத்துக் கோளங்கள் (orthogonal spheres) என அழைக்கப்படுகின்றன.

இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகள் தரப்பட்டிருந்தால், செங்குத்து வெட்டுகைக்குரிய நிபந்தனையைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.



படம் 45

கோளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+2u_rx+2v_ry+2w_rz+d_r=0 \quad (r=1, 2).$$

மையங்களின் ஆய எண்கள் $(-u_1,-v_1,-w_1)$; $(-u_2,-v_2,-w_2)$ ஆவன.

$$r_1=\sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2-d_1}$$
$$r_2=\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2-d_2}$$

இரு கோளங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுவதால், $O_1\hat{P}O_2=90°$

$$\therefore\ O_1P^2+O_2P^2=O_1O_2^2$$

i.e., $r_1^2+r_2^2\equiv O_1O_2^2$

i.e., $(u_1^2+v_1^2+w_1^2-d_1)+(u_2^2+v_2^2+w_2^2-d_2)=$
$$(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2+(w_1-w_2)^2$$

இதைச் சுருக்கினல்,

$2u_1u_2+2v_1v_2+2w_1w_2=d_1+d_2$ என்ருகும்.

குறிப்பு: இரு கோளங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ள இதுவே வேண்டியதும் போதியதுமான நிபந்தனை (necessary and sufficient condition) என்பதைக் காட்ட முடியும். நிபந்தனையின் வேண்டிய தன்மை இவண் நிரூபித்துள்ளோம். போதிய தன்மையைக் காட்ட, மேற்கண்ட அடிகளைக் கீழிருந்து மேல் நோக்கி எழுதுக.

5·19. ஒரே தொடுதளக் கோளங்கள் (coaxal spheres)

ஒரு கோளத் தொகுதியில், எவையேனும் இரு கோளங்களுக்கு ஒரே சமத் தொடுகோட்டுத்தளம் அமையுமெனில், அது ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதி (coaxal system of spheres) என அழைக்கப்படும்.

இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகள் $S_1=0$, $S_2=0$ என்ருல், சமன்பாடு $S_1+kS_2=0$ (k யாதானுமொரு மாறிலி) ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியைக் குறிக்கின்றது.

ஏனெனில், $S_1+k_1S_2=0$, $S_1+k_2S_2=0$ என்பவை இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு கோளங்களென்ருல், அவற்றின் சமத்தொடுகோட்டுத் தளம்,

$(1+k_2)\ (S_1+k_1S_2)-(1+k_1)\ (S_1+k_2S_2)=0$ ஆகும்.

அதாவது $(k_2-k_1)\ (S_1-S_2)=0$

i.e., $S_1-S_2=0$

இச்சமன்பாடு k ஐச் சாராதிருப்பதால், இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த கோளங்களுக்குப் பொதுவான சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்தைக் குறிப்பதாய் அமைகின்றது. எனவே, வரையறையின் படி, சமன்பாடு $S_1+kS_2=0$ ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியைக் குறிக்கின்றது. இத்தொகுதி கொடுக்கப்பட்ட இரு கோளங்களினுல், ஒரேயொரு முறையில் தீர்மானிக்கப்படுவதை அறியலாம். பொதுச் சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு $L=0$ என்ருல், இத்தொகுதியின் சமன்பாடு $S_1+\lambda L=0$ (λ யாதானுமொரு

மாறிலி) என்றும் எழுதப்படும். இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கோளத் தொகுதியையே தருகின்றன. இச்சமன்பாடுகளில் வரும் துணையலகுகளான k, λ என்பவையின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த எல்லாக் கோளங்களின் சமன்பாடுகளை யும் அறிகின்றோம்.

குறிப்பு: ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியைச் சேர்ந்த எல்லாக் கோளங்களின் மையங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமை கின்றன. இந்த நேர்க்கோடு இக்கோளங்களின் பொதுச் சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

5·20. ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை எளிய வடிவத்தில் அறிதல்

சமன்பாட்டை எளிய வடிவத்தில் பெற, ஆய அச்சுகளைப் பின்வருமாறு தெரிந்து கொள்வோம்.

இக்கோளத் தொகுதியின் மையப் பிணைவரையை (line of centres) X அச்சாகவும், இக்கோடு பொதுச் சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியை ஆதியாகவும் கொள்க.

ஆகவே, சமத்தொடு கோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு $x=0$ ஆகும்.

இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ என்க.

இக்கோளத்தின் மையம் X அச்சின் மேல் அமைவதால்,

$$v=0=w$$

எனவே, சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+d=0$ என்றாகும்.

இத்தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$x^2+y^2+z^2+2u_1x+d_1=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2u_2x+d_2=0$$ என்றால்,

சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு

$$2\,(u_1-u_2)x+(d_1-d_2)=0$$ ஆகும்.

ஆனால் சமத்தொடு கோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு $x=0$ ஆக இருப்பதால்,

$d_1-d_2=0$ ஆக வேண்டும்.

$\therefore \quad d_1=d_2$

ஆகவே, சமன்பாட்டில் தனியுறுப்பு எல்லாக் கோளங்களுக்கும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும் என அறிகிறோம்.

எனவே, ஒரே தொடுதளக் கோளத்தொகுதியின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$$

என்ற வடிவத்தில் பெறப்படுகின்றது. இதில் λ ஒரு துணையலகாகவும், d மாறிலியாகவும் அமைகின்றன.

5·21. ஒரே தொடுதளக் கோளத்தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகளை (limiting Points) அறிதல்

பூச்சியத்தை ஆரமாகக் கொண்ட இரு கோளங்கள் இத்தொகுதியைச் சேர்ந்தனவாக உள்ளன. ஒரே தொடுதளத் தொகுதியின் புள்ளிக் கோளங்களென இவை அழைக்கப்படுகின்றன. இவையே ஒரே தொடுதளக் கோளத்தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும். தொகுதியின் தன்மையைப் பொருத்து இப்புள்ளிகள் மெய்யாகவோ, கற்பனையாகவோ அல்லது ஒன்றுபடுவனவாகவோ அமைகின்றன. மாணவர்கள் ஏற்கெனவே இருபரிமாண பகுமுறை வடிவகணிதத்தில் பொதுவச்சு வட்டங்களைப் பற்றிப் பயின்று இருப்பதால், எல்லைப் புள்ளிகளைப் பற்றிய விரிவான விளக்கம் இங்கே அவசியமில்லை என்று கருதுகிறேன்.

ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் சமன்பாட்டை எளிய வடிவத்தில் எடுத்துக் கொள்க.

$$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$$

இத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு கோளத்தின் மையம் $(-\lambda, 0, 0)$ எனவும், ஆரம் $\sqrt{\lambda^2-d}$ எனவும் ஆகும்.

இது ஒரு புள்ளிக் கோளமாக இருப்பின், ஆரம் $=0$

$$i.e., \quad \lambda^2-d=0$$

$$i.e., \quad \lambda=\pm\sqrt{d}$$

எனவே எல்லைப் புள்ளிகளின் ஆய எண்கள் $(\mp\sqrt{d}, 0, 0)$ ஆகின்றன.

குறிப்பு: $d \gtrless 0$ ஆக இருப்பதைப் பொருத்து, எல்லைப் புள்ளிகள் மெய்யாகவோ அல்லது கற்பனையாகவோ அமைகின்றன.

எல்லைப்புள்ளிகள் மெய்யானவையெனில், ஒரே தொடுதளக் கோளத்தொகுதி வெட்டா வகை (non-intersecting·type) யைச் சேர்ந்ததெனக் கூறப்படும்.

எல்லைப் புள்ளிகள் கற்பனையானவையெனில், இத்தொகுதி வெட்டும் வகை (intersecting type) யைச் சேர்ந்ததெனக் கூறப்படும்.

5·22. செங்குத்துத் தொகுதி (orthogonal System)

ஒரே தொடுதளக் கோளத்தொகுதியின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2\lambda x+d=0$ எனக் கொள்க.

இதில் ஒரு கோளத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டும் கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2u'x+2v'y+2w'z+d'=0$ என்க. செங்குத்துக் கோளங்களின் நிபந்தனையின்படி,

$$2u'\lambda=d+d'$$

இத்தொடர்பு λ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருத்தமாக இருக்கவேண்டுமெனில், $u'=0$ என்ருக வேண்டும்.

$$\therefore \quad d'=-d$$

ஆகவே கொடுத்த ஒரே தொடுதளத் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு கோளத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டும் கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2+2\mu y+2\nu z-d=0$ என்பதே.

இதில் μ, ν ஆகியவை துணையலகுகளாகும்.

இக்கோளத் தொகுதி கொடுத்த ஒரே தொடுதளத் தொகுதியின் எல்லைப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்வதை அறியலாம்.

குறிப்பு : $\mu=0$ எனின், தளம் $y=0$ ஐச் சமத் தொடுகோட்டுத்தளமாகக் கொண்ட ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதி, கொடுத்த ஒரே தொடுதளத் தொகுதிக்குச் செங்குத்தாக அமைகின்றது. அவ்வாறே, $\nu=0$ எனின், தளம் $z=0$ ஐச் சமத் தொடுகோட்டுத் தளமாகக் கொண்ட ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதி கொடுத்த ஒரே தொடுதளத் தொகுதிக்குச் செங்குத்தாக அமைகின்றது.

மாதிரி 1 : ஆதி வழியாகவும், புள்ளிகள் $A\,(a, 0, 0)$, $B\,(0, b, 0)$, $C\,(0, 0, c)$ வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தைக் காண்க.

கோளத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ எனக் கொள்க.

கோளம் ஆதி வழியாகச் செல்வதால், $d=0$ ஆகும்.

$A(a, 0, 0)$ கோளத்தில் அமைவதால்,

$$a^2+2ua=0$$

அதாவது, $2u=-a$

இதேபோல, $2v=-b$; $2w=-c$

இவற்றைச் சன்மபாட்டில் பிரதியிட,

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ என்றுகும்.

இதுவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு.

மாதிரி 2: ஒரு வட்டத்தின் மையம் (α, β, γ) ஆகவும், ஆரம் k ஆகவும் உள்ளது. இது அமைந்த தளத்திற்கு வரையப் படும் செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனில், வட்டத்தின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

புள்ளி (α, β, γ) ஐ மையமாகவும் k ஐ ஆரமாகவுங் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=k^2$$

வட்டமமைந்த தளம் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வழியாகச் செல்வதாலும், தளத்திற்குரிய செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) என்பதாலும், அதன் சமன்பாடு

$l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0$ ஆகும்.

இக்கோளமும், தளமும் வெட்டிக் கொள்ளும் வட்டமே தேவையான வட்டமாக இருப்பதால், வட்டத்தின் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{array}{l}(x-\alpha)^2+(y+\beta)^2+(z-\gamma)^2=k^2\\ l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)=0\end{array}\right\}$$ என்பவையே.

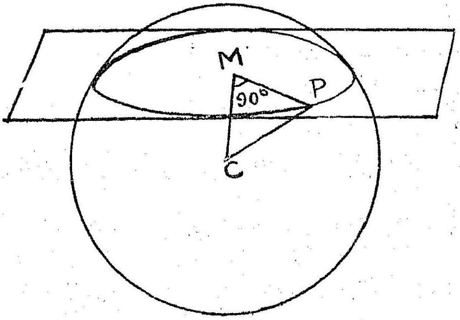
மாதிரி 3: பின்வரும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் அறிக.

$$x^2+y^2+z^2-2y-4z=11;\ x+5y+2z=15.$$

கோளத்தின் மையத்தை C ஆகவும், வட்டத்தின் மையத்தை M ஆகவும் கொள்க.

P வட்டத்தின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியாகுக.

C இன் ஆய எண்கள் (0, 1, 2) என்பவையே.



படம் 46

$$\text{கோளத்தின் ஆரம்} = \sqrt{1+4+11}$$
$$= 4$$

CM கொடுத்த தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளது.

$\therefore$ $CM = C$ இலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளம்

$$= \pm \frac{(2+4-15)}{\sqrt{1+4+4}}$$
$$= 3$$

$$\text{வட்டத்தின் ஆரம்} = MP$$
$$= \sqrt{CP^2 - CM^2}$$
$$= \sqrt{16-9}$$
$$= \sqrt{7}$$

M இன் ஆய எண்கள் (x_1, y_1, z_1) என்க.

CM இன் திசைத் தகவுகள் (x_1, y_1-1, z_1-2) ஆவன.

CM தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$\frac{x_1}{1} = \frac{y_1-1}{2} = \frac{z_1-2}{2} = k \text{ என்க.}$$

$\therefore \quad x_1 = k;\ y_1 = 1+2k;\ z_1 = 2+2k$

M தளத்தின் மேல் அமைந்த புள்ளியாகையால்,

$$x_1+2y_1+2z_1=15$$

அதாவது,

$$k+2(1+2k)+2(2+2k)=15$$
$$i.e.,\ 9k=9$$
$$\therefore\ k=1$$

ஆகவே, வட்டத்தின் மையம் $(1, 3, 4)$ ஆகும்.

மாதிரி 4. ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் $A\ (a, 0, 0)$, $B\ (0, b, 0)$, $C\ (0, 0, c)$ என்றால், அதன் சுற்று வட்டத்திற்குரிய சமன்பாடுகளையும், சுற்று வட்ட மையத்தையும் காண்க.

$OABC$ என்ற கோளத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$$

தளம் ABC இன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

H கோளத்தின் மையமெனில், அதன் ஆய எண்கள் $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ ஆகும்.

$K\ (x_1, y_1, z_1)$ ஐச் சுற்றுவட்ட மையமாகக் கொள்க.

HK இன் திசைத் தகவுகள் $\left(x_1-\frac{a}{2},\ y_1-\frac{b}{2},\ z_1-\frac{c}{2}\right)$ ஆவன.

HK தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$\frac{x_1-a/2}{1/a}=\frac{y_1-b/2}{1/b}=\frac{z_1-c/2}{1/c}=\lambda \text{ (என்க)}$$

இவற்றிலிருந்து,

$$x_1=\frac{a}{2}+\frac{\lambda}{a}\ ;\ y_1=\frac{b}{2}+\frac{\lambda}{b}\ ;\ z_1=\frac{c}{2}+\frac{\lambda}{c}$$

K, தளத்திலமைந்த புள்ளியாகையால்,

$$\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}+\frac{z_1}{c}=1$$

அதாவது,

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2}+\frac{\lambda}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{b}{2}+\frac{\lambda}{b}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{c}{2}+\frac{\lambda}{c}\right)=1$$

$$i.e.;\quad \lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lambda=\frac{-1}{2\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)}$$

$$\therefore x_1=\frac{a}{2}-\frac{1}{2a\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}a\left(b^{-2}+c^{-2}\right)}{\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)}$$

இவ்வாறே, $y_1=\dfrac{\frac{1}{2}b\left(c^{-2}+a^{-2}\right)}{\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)}$

$$z_1=\frac{\frac{1}{2}c\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}\right)}$$

மாதிரி 5: நேர்க்கோடு $6x-3y-23=0=3z+2$ வழிச் செல்லும் இரு தளங்கள், கோளம் $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-7=0$ ஐத் தொடுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகளை அறிக.

கொடுத்த நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு

$6x-3y-23+k(3z+2)=0$ என்பதே.

அதாவது, $6x-3y+3kz+(2k-23)=0$ ——— (1)

கோளத்தின் மையம் $(-1, 2, -3)$ எனவும் ஆரம் $\sqrt{21}$ எனவும் உள்ளது.

தளம் (1) கோளத்தைத் தொடுமெனில், தளத்திலிருந்து கோள மையத்தின் தொலைவு அதன் ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

ஆகவே, $\dfrac{\pm(-6-6-9k+2k-23)}{\sqrt{36+9+9k^2}} = \sqrt{21}$

அதாவது, $\dfrac{(7k+35)^2}{(9k^2+45)} = 21$

இதிலிருந்து, $2k^2-7k-4=0$ என்றுகும்.

$\therefore \quad k=-\frac{1}{2}, 4.$

k இன் மதிப்புக்களை சமன்பாடு (1) இல் பிரதியிட, தேவையான தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

அவைகளாவன $4x-2y-z=16$, $2x-y+4z=5$ என்பவையே.

மாதிரி **6:** (a, b, c) என்ற ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்லும் தளம் ஆய அச்சுகளை A, B, C இல் சந்திக்கின்றது. கோளம் $OABC$ இன் மைய இயங்குவரை $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=2$ எனக் காட்டுக.

$OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OC=\gamma$ (என்க)

கோளம் $OABC$ இன் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2-\alpha x-\beta y-\gamma z=0 \quad \text{——} \quad (1)$$

தளம் ABC இன் சமன்பாடு $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1$ —— (2)

இத்தளம் கொடுத்த புள்ளி வழியாகச் செல்வதால்,

$$\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}=1 \quad \text{——} \quad (3)$$

கோளம் $OABC$ இன் மையம் (x_1, y_1, z_1) எனில்,

$$x_1=\frac{\alpha}{2}, \ y_1=\frac{\beta}{2}, \ z_1=\frac{\gamma}{2}$$

அதாவது $\alpha=2x_1$; $\beta=2y_1$; $\gamma=2z_1$

இவற்றைத் தொடர்பு (3) இல் பிரதியிட,

$\dfrac{a}{2x_1}+\dfrac{b}{2y_1}+\dfrac{c}{2z_1}=1$ என்றுகும்.

ஆகவே கோள மையத்தின் இயங்குவரை

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$$ என்பதேயாகும்.

மாதிரி 7: $x^2+y^2=a^2$; $z=0$ என்ற வட்டத்தின் வழியாகவும், புள்ளி (α, β, γ) வழியாகவும் செல்லும் கோளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$x^2+y^2=a^2$ ஒரு நேர் வட்ட உருளையின் சமன்பாடு. இதை $z=0$ தளம் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தில் சந்திக்கின்றது. இதே வட்டத்தை, கோளம் $x^2+y^2+z^2=a^2$ இல் $z=0$ தளத்தின் வெட்டு வளைவரையாகவும் பெறலாம்.

ஆகவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு

$(x^2+y^2+z^2-a^2)+\lambda z=0$ என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றது.

இக்கோளம் கொடுத்துள்ள புள்ளி வழியாகச் செல்லுமெனில், $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)+\lambda\gamma=0$ ஆகும்.

$$\therefore \lambda = \frac{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)}{\gamma}$$

எனவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு

$\gamma\,(x^2+y^2+z^2-a^2)=z(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-a^2)$ என்பதே.

மாதிரி 8: வட்டம் $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0$; $2x+3y+4z=8$ ஐப் பெருவட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

கொடுத்த வட்டத்தின் வழியாகச் செல்லும் கோளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+7y-2z+2+\lambda(2x+3y+4z-8)=0 \qquad (1)$$

அதாவது, $x^2+y^2+z^2+2\lambda x+(7+3\lambda)y+2(2\lambda-1)z+2(1-4\lambda)=0$

கோளத்தின் மையம் $\{-\lambda, -\tfrac{1}{2}(7+3\lambda), -(2\lambda-1)\}$ ஆகும்.

கொடுத்த வட்டம் கோளத்தின் பெருவட்டமாக அமைவதால், வட்டத்தின் மையம் கோளத்தின் மையத்தோடு ஒன்றுபடும்.

அதாவது கோள மையம் வட்டத்தின் தளத்தில் அமைகின்றது.

ஆகவே,

$$-2\lambda-\tfrac{3}{2}(7+3\lambda)-4(2\lambda-1)=8$$

$$\therefore \quad \lambda=-1.$$

இதைச் சமன்பாடு (i) இல் பிரதியிடுக.

ஆகவே தேவையான கோளத்தின் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$ ஆகும்.

மாதிரி 9 : கோளங்கள் $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1=0$, $x^2+y^2+z^2-x+4y-6z-2=0$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமமென்றால், அப்புள்ளி $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{3}$ என்ற நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றதென நிறுவுக.

மூன்று கோளங்களின் சமன்பாடுகளை $S_1=0$; $S_2=0$; $S_3=0$ எனக் கொள்க.

$$S_1\equiv x^2+y^2+z^2-1\,; \quad S_2\equiv x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-1\,;$$
$$S_3\equiv x^2+y^2+z^2-x+4y-6z-2$$

இக் கோளங்களுக்குரிய இரு சமத்தொடுகோட்டுத் தளங்கள்

$S_1-S_2=0$; $S_1-S_3=0$ ஆகும்.

அதாவது, $-2x+2y-2z=0$; $x-4y+6z+1=0$

i. e., $x-y+z=0$; $x-4y+6z+1=0$

இத் தளங்கள் வெட்டுங் கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (2, 5, 3) ஆகும்.

(1, 2, 1) என்ற புள்ளி இக்கோட்டின் மேல் அமைகின்றதெனச் சோதித்தறியலாம்.

ஆகவே இக் கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z-1}{3}$ ஆகும்.

இது மூன்று கோளங்களின் சமத் தொடுகோட்டிற்குரிய கோடாகும். இக் கோட்டின்மேல். எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து மூன்று கோளங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடு கோடுகள் சமமாக இருக்கின்றன.

மாதிரி **10 :** பின்வரும் கோளங்களால் வரையறுக்கப்படும் ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

$$x^2+y^2+z^8+3x-3y+6=0\,; \quad x^2+y^2+z^2-6y-6z+6=0.$$

இக் கோளங்கள் தீர்மானிக்கும் ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் பொதுச் சமத் தொடுகோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு $3x+3y+6z=0$ ஆகும்.

$i.\,e.,\quad x+y+2z=0.$

ஆகவே, தேவையான ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+3x-3y+6+\lambda\,(x+y+2z)=0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது, $x^2+y^2+z^2+(3+\lambda)\,x+(\lambda-3)\,y+2\lambda z+6=0$

இத்தொகுதியைச்சேர்ந்த ஏதாவதொரு கோளத்தின் மையம் $[-\frac{1}{2}(3+\lambda), -\frac{1}{2}(\lambda-3), -\lambda]$ ஆகவும், ஆரம்

$$\sqrt{\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2+\lambda^2-6} \text{ ஆகவும் இருக்கின்றன.}$$

எல்லைப் புள்ளிகள் இத் தொகுதியைச் சேர்ந்த புள்ளிக் கோளங்களாகையால், ஆரம் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore\quad 6\lambda^2-6=0$$

$$i.e.,\quad \lambda=\pm 1$$

λ இன் மதிப்புக்களை மையத்தின் ஆய எண்களில் பிரதியிட்டால், எல்லைப் புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன.

$(-1, 2, 1),\ (-2, 1, -1)$ என்பவை இத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளாகும்.

பயிற்சி 5

1. பின்வரும் கோளங்களின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) $(-2, 1, -1)$ என்ற மையமும், 4 அலகுகள் ஆரமும்.

   (ii) $(0, \frac{3}{2}, 2)$ என்ற மையமும், 3 அலகுகள் ஆரமும்.

2. பின்வரும் கோளங்களின் மையமும், ஆரமும் அறிக.

   (i) $x^2+y^2+z^2-6x+8y-10z+1=0$.

   (ii) $3x^2+3y^2+3z^2+2x-4y-2z-1=0$

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோளங்கள் யாவை ?

   (i) $(4, -1, 2)$; $(0, -2, 3)$; $(1, 5, -1)$; $(2, 0, 1)$.

   (ii) $(1, -1, -1)$; $(3, 3, 1)$; $(-2, 0, 5)$; $(-1, 4, 4)$.

4. புள்ளிகள் $(3, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$, $(2, -5, 4)$ வழிச் செல்லும் கோளத்தின் மையம் $2x+3y+4z=6$ தளத்தில் அமையுமெனில், அதன் சமன்பாடு $x^2+y^2+z^2+4y-6z-1=0$ எனக் காட்டுக.

5. புள்ளிகள் $(0, -2, -4)$, $(2, -1, -1)$ வழிச் செல்லும் கோளத்தின் மையம், நேர்க்கோடு $5y+2z=0=2x-3y$ இல் அமைந்தால், கோளத்தின் சமன்பாட்டை அறிக.

6. ஒரு நான்முகியின் முகங்கள் $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ எனின், அதைச் சுற்றியமைக்கப்பட்ட கோளத்தின் சமன்பாடு யாது ?

7. ஒரு தளம் (a, b, c) என்ற ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழியாகச் செல்கின்றது. ஆதியிலிருந்து அந்தத் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டடியின் இயங்குவரை $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ என நிறுவுக.

8. ஆதி வழியாகச் செல்வதும், அச்சுகளைப் புள்ளிகள் A, B, C இல் சந்திப்பதுமான ஒரு கோளத்தின் மாறுத ஆரம் r ஆகும். தளம் ABC க்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டடியின் இயங்குவரை $(x^2+y^2+z^2)^2(x^{-2}+y^{-2}+z^{-2})=4r^2$ எனக் காட்டுக.

9. முந்தைய கேள்வியில், நான்முகி $OABC$ இன் நடுக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரை $4(x^2+y^2+z^2)=r^2$ என நிறுவுக.

10. கோளம் $x^2+y^2+z^2=36$, ஒரு தளத்தால் வெட்டப்படும் போது கிடைக்கும் வட்டத்தின் மையம் $(2, 3, -4)$ ஆயின், தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

11. பின்வரும் வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் காண்க.
$x+2y+2z=20$; $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=2$

12. தளம் $2x-2y+z+12=0$, கோளம் $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$ ஐத் தொடுகின்றதெனக் காட்டி, தொடு புள்ளியின் ஆய எண்களைக் கணக்கிடு.

13. கோளம் $x^2+y^2+z^2+6x-2z+1=0$ ஐத் தொடுந் தளங்கள் $3(16-x)=3z=2y+30$ என்ற நேர்க்கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

14. தளம் $2x-y+2z=1$ க்கு இணையாகக் கோளம் $x^2+y^2+z^2-4x+2y-4=0$ ஐத் தொடுந்தளங்களின் தொடு புள்ளிகள் யாவை?

15. கோளம் $x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$ ஐப் புள்ளி $(1, 1, -1)$ இல் தொடுங் கோளம் ஆதி வழியாகச் செல்லுமெனில், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

16. கோளம் $4x^2+4y^2+4z^2-25x-2y+10z=0$ ஐப் புள்ளி $(2, -2, 1)$ இல் தொடுங் கோளம் $(0, 0, -1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லுமென்றால், அதன் சமன்பாடு என்ன?

17. $OXYZ$ என்ற அரைக்கால் பகுதியில் (octant) அமைந்ததும் ஆயத் தளங்களைத் தொடுவதுமான கோளத்தின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் அமையுமென நிறுவுக.

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda(x+y+z)+2\lambda^2=0$$

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியின் வழியாக ஆயத்தளங்களைத் தொடும்படியாக, பொதுவாக இரு கோளங்கள் வரைய முடியுமெனக் காட்டி, அப் புள்ளியின் எந்த நிலைகளில் இவ்விரு கோளங்களும் (a) மெய்யாக (b) ஒன்றுபடும்படியாக அமையும் என்று காண்க.

18. ஆயத்தளங்களையும், $x+y+z=1$ என்று தளத்தையும் தொடும் இரு கோளங்கள் உண்டு எனக் காட்டி, அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் அறிக.

19. கொடுத்த நேர்க்கோட்டில் மாறும் புள்ளியான P க்கு ஆய அச்சுகளின்மேல் A, B, C ஆகியவை குத்துவீழல்களெனில், கோளம் $OABC$ ஒரு நிலைத்த வட்டத்தின் வழியாகச் செல்கிறது என நிறுவுக.

20. பின்வரும் நான்முகியின் உள்ளே வரையப்படும் (inscribed) கோளங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+2z=1$

(ii) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+6y+3z-14=0$

21. வட்டம் $x^2+y^2+z^2=9$; $2x+3y+4z=5$ வழிச் செல்லும் கோளத்தின்மேல் புள்ளி $(1, 2, 3)$ அமையுமெனில், அதன் சமன்பாடு என்ன ?

22. வட்டம் $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-3=0$; $2x+y+z=4$ வழிச் செல்லும் கோளங்கள் $x+2y=7$ தளத்தைத் தொடுமெனின், அவற்றின் சமன்பாடுகள் யாவை ?

23. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+7=0$; $2x-y+2z=5$ என்பதைப் பெருவட்டமாகக் கொண்ட கோளத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

24. பின்வரும் வட்டங்கள் ஒரே கோளத்தில் அமைகின்றன என்று காட்டி, அதன் சமன்பாட்டினையும் அறிக.

$x^2+y^2+z^2-2x+3y+4z-5=0$; $5y+6z+1=0$

$x^2+y^2+z^2-3x-4y+5z-6=0$; $x+2y-7z=0$

25. வட்டம் $x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z+6=0$; $3x-4y+5z-15=0$ வழிச் செல்லும் கோளம் $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+11=0$ கோளத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுவதாயின், அதன் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

26. தளம் $3x+2y-z+2=0$ ஐ $(1, -2, 1)$ புள்ளியில் தொடுங் கோளம், $x^2+y^2+z^2-4x+6y+4=0$ கோளத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுமெனில் அதன் சமன்பாடு யாது ?

27. புள்ளிகள் (0, 3, 0), (−2, −1, −4) வழிச் செல்லுங் கோளம் பின்வரும் கோளங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டு மெனில், அதன் சமன்பாட்டினை அறிக.

$$x^2+y^2+z^2+x-3z-2=0\ ;\ 2(x^2+y^2+z^2)+x+3y+4=0$$

28. பின்வரும் கோளங்களின் சமத்தொடுகோட்டிற்குரிய கோட்டினைக் காண்க.

$$x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z+2=0\ ;$$
$$x^2+y^2+z^2+4x+4z+4=0\ ;$$
$$x^2+y^2+z^2+x+6y-4z-2=0.$$

29. வட்டம் $x^2+y^2-2ax+r^2=0$; $z=0$ இன் வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு கோளமும் $x^2+y^2=r^2$; $y=0$ என்ற வட்டத்தின் வழிச் செல்லும் ஒவ்வொரு கோளத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றது என நிறுவுக.

30. கொடுத்த இரு கோளங்களைப் பொருத்து ஒரு புள்ளியின் திறன்கள் மாறாத விகிதத்தில் இருந்தால், அப் புள்ளியின் இயங்குவரை கொடுத்த கோளங்களோடு ஒரே தொடுதளத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு கோளமென்று காட்டுக.

31. பின்வரும் ஒரே தொடுதளக் கோளத் தொகுதியின் எல்லைப் புள்ளிகளைக் காண்க.

$$x^2+y^2+z^2-20x+30y-40z+29+\lambda(2x-3y+4z)=0$$

32. ஒரே தொடுதளத் தொகுதியில் கொடுத்த தளத்தைத் தொடுமாறு பொதுவாக இரு கோளங்கள் உள்ளன எனக் காட்டுக.

ஒரே தொடுதளத் தொகுதி $x^2+y^2+z^2-5+\lambda(2x+y+3z-3)=0$ ஐச் சேர்ந்த இரு கோளங்கள் $3x+4y=15$ தளத்தைத் தொடுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகளை அறிக.

33. கோளம் $x^2+y^2+z^2=1$ ஐத் தளம் $2x+4y+5z=6$ வெட்டும் வட்டத்தின் வழிச் செல்லும் கோளத்தொகுதியின் பொதுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

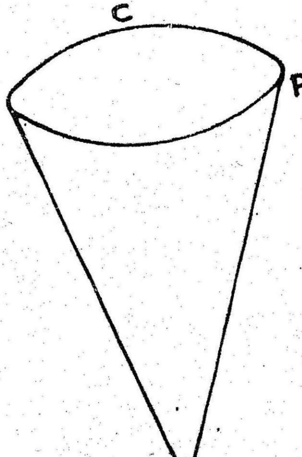
இவற்றில் $z=0$ தளத்தைத் தொடும் கோளங்களின் சமன்பாடுகளை அறிக.

6. கூம்பும் உருளையும்

(Cone and Cylinder)

6·1. ஒரு நிலைத்த புள்ளி V வழியாகச் சென்று ஒரு நிலைத்த வளைவரையான C ஐ P இல் சந்திக்கும் VP என்ற நகருங் கோட்டால் உருவாக்கப்படும் மேற்பரப்பே கூம்பாகும்.

V கூம்பின் உச்சி (**vertex**) எனவும், C அடி வளைவரை (**base curve**) எனவும், நகருங் கோடு கூம்பின் பிறப்பாக்கி (**generator**) எனவும் அழைக்கப்படும்.



படம் 47

அடி வளைவரை ஒன்றேயொன்ருக அமைவதில்லை. அதே கூம்பை மற்றொரு மேற்பரப்போ அல்லது தளமோ வெட்டும் வளைவரையை C க்குப் பதிலாக அடி வளைவரையாகக் கொள்ள முடியும்.

கூம்பின் பிறப்பாக்கி உச்சி வழிச் செல்லும் ஒரு நிலைத்த கோட்டுடன் மாருத கோணத்தை உண்டாக்கினல், அக்கூம்பு ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு (**right circular cone**) என அழைக்கப்படும். அந்த நிலைத்த கோடு கூம்பின் அச்சு எனவும், மாருத கோணம் அரை உச்சிக் கோணம் (**semi-vertical angle**) எனவும் கூறப்படும். இதில் அடி வளைவரை ஒரு வட்டமாகும்.

பிறப்பாக்கியின் தன்மைகளைப் பொருத்து, கூம்பின் சமன்பாடு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட எந்தப் படியிலும் இருக்க முடியுமாயினும், இப்பகுதியில் இருபடிக் கூம்புகளைப் (quadric cones) பற்றியே பயிலப் போகின்றோம்.

6·2. உச்சி (α, β, γ) எனவும் அடி வளைவரை $f(x, y)=0, \quad z=0$ எனவும் தரப்பட்டால் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணல்

புள்ளி (α, β, γ) வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \text{ ——— (1) ஆகும்.}$$

இது கூம்பின் பிறப்பாக்கியாக வேண்டுமெனில், இக்கோடு அடி வளைவரையைச் சந்திக்க வேண்டும்.

இக்கோடு $z=0$ தளத்தை $\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}, \beta-\frac{m\gamma}{n}, 0\right)$ என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றது.

இந்தப் புள்ளி கொடுத்த வளைவரையில் அமைய வேண்டுமெனில்,

$$f\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}, \beta-\frac{m\gamma}{n}\right)=0 \text{ ——— (2)}$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றினிடையே l, m, n என்பவைகளை நீக்கினால், கூம்பின் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

அதாவது, $f\left\{\alpha-\frac{\gamma(x-\alpha)}{(z-\gamma)}, \beta-\frac{\gamma(y-\beta)}{(z-\gamma)}\right\}=0$

என்பதே தேவையான கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

6·3. ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டை அறிதல்

கூம்பின் சமன்பாட்டை இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0 \text{ ——— (1)}$$

$P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளி இக்கூம்பின் மேல் அமையுமானால், OP இன் மேல் அமைந்த ஏதாகிலுமொரு புள்ளியான Q இன் ஆய எண்கள் (rx_1, ry_1, rz_1) ஆகும்.

கூம்பின் மேல் Q அமையுமெனில், r இல் பின்வரும் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

$$r^2(ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2\,fy_1z_1+2\,gz_1x_1+2\,hx_1y_1)+ \\ 2\,r(ux_1+vy_1+wz_1)+d=0 \quad \text{———(2)}$$

OP கூம்பின் ஒரு பிறப்பாக்கியானல், OP இன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் கூம்பின் மேல் அமைய வேண்டும். அதாவது, r இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் சமன்பாடு (2) சரியாக இருக்க வேண்டும். r இல் உள்ள இவ்விருபடிச் சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமையாக வேண்டும்.

ஆகவே, $ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2\,fy_1z_1+2\,gz_1x_1+$

$$2\,hx_1y_1=0 \quad \text{———(3)}$$

$$ux_1+vy_1+wz_1=0 \quad \text{———(4)}$$

$$d=0 \quad \text{———(5)}$$

தொடர்பு (4) இன்படி, கூம்பின் மேல் அமையும் (x_1, y_1, z_1) என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியும் பின்வரும் ஒருபடிச் சமன்பாட்டில் பொருந்த வேண்டும்.

$$ux+vy+wz=0$$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பு ஒரு தளமாகின்றது. இம்முடிவு ஒரு முரண்பாடாகும்.

$\therefore\ u=v=w=0$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே கூம்பின் சமன்பாடு

$ax^2+by^2+cz^2+2\,fyz+2\,gzx+2\,hxy=0$ ஆகும்.

இதிலிருந்து ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு ஒரே படித்தானது (homogeneous) என அறிகின்றோம்.

மறுதலையாக, இருபடியில் உள்ள ஒவ்வொரு ஒரே படித்தான சமன்பாடும் ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பைக் குறிக்கும் என அறியலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரேபடித்தானதாக இருப்பதால், (x_1, y_1, z_1) என்ற ஆய எண்கள் சமன்பாட்டில் பொருந்துமெனின், r இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் (rx_1, ry_1, rz_1) என்ற ஆய எண்களும் சமன்பாட்டில் பொருந்தும். ஆகவே புள்ளி

P கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பில் அமைந்தால், OPஇன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் அம்மேற்பரப்பில் இடம் பெறும். இவ்விதமாக, மேற்பரப்பு ஆதி வழியாகச் செல்லும் கோடுகளால் உருவாக்கப்படுகின்றது. ஆகவே இது ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பாகும்.

குறிப்பு : கூம்புக்குரிய பிறப்பாக்கி ஒன்றின் திசைத்தகவுகள் (l, m, n) எனக் கொள்க.

கூம்பின் சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \text{ (என்க)} \text{ ——— } (1)$$

இக்கோட்டின் மேலுள்ள (lr, mr, nr) என்ற புள்ளி r இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் கூம்பின் மேல் அமையும்.

ஆகவே, $al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=0$ ——— (2)
என்ற தொடர்பு கிடைக்கின்றது.

மறுதலையாக, ஒரு நேர்க்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் தொடர்பு (2)ஆல் இணைக்கப்படுமேயெனில், அக்கோடு சமன்பாடு (1)ஆல் தரப்படும் கூம்பின் பிறப்பாக்கியாகும்.

6·4. ஆய அச்சுகள் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் சமன்பாட்டை அறிதல்

ஆதியை உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \text{ ஆகும்.}$$

x அச்சு கூம்பின் ஒரு பிறப்பாக்கியாவதால், அதன் திசைக் கொசைன்கள் $(1, 0, 0)$ மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் பொருந்த வேண்டும்.

$$\therefore \quad a=0$$

இதேபோல, $b=0=c$

ஆகவே, கூம்பின் சமன்பாடு

$$fyz+gzx+hxy=0 \text{ என்றாகும்.}$$

6·5. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகக் கொடுத்துள்ள இரு மூன்று கோட்டுக் கணங்கள் ஒரு கூம்பிற்குப் பிறப்பாக்கிகளாக அமையுமெனக் காட்டுக

கொடுத்த இரு மூன்று கோட்டுக் கணங்களில் ஒன்றை ஆய அச்சுகளாகக் கொள்க. மற்றவைகளின் திசைக் கொசைன்கள்

(l_1, m_1, n_1) ; (l_2, m_2, n_2) ; (l_3, m_3, n_3) என்க. அவைகளை முறையே OP, OQ, OR என்போம்.

கூம்பின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் அமையும்.

$$fyz+gzx+hxy=0$$

OP, OQ கூம்பின் பிறப்பாக்கிகளாவதால்,

$$fm_1n_1+gn_1l_1+hl_1m_1=0$$
$$fm_2n_2+gn_2l_2+hl_2m_2=0$$

இவற்றைக் கூட்டினுல்,

$$f(m_1n_1+m_2n_2)+g(n_1l_1+n_2l_2)+h(l_1m_1+l_2m_2)=0 \quad \text{———} (1)$$

OP, OQ, OR என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால்,

$$\left.\begin{aligned} m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3&=0\\ n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3&=0\\ l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3&=0 \end{aligned}\right\} \text{———} (2)$$

தொடர்புகள் (2) ஐத் தொடர்பு (1) இல் பிரதியிட்டு, நெடுகிலும் குறியை மாற்ற, $fm_3n_3+gn_3l_3+hl_3m_3=0$ என்ருகின்றது.

ஆகவே, OR கூம்பின் மேல் அமைகின்றது.

அதாவது OP, OQ வழிச் செல்லும் கூம்பு OR வழியாகவும் செல்லுகின்றது.

6·6. நேர் வட்டக் கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணல்

கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் θ எனவும், அச்சு $\dfrac{x-\alpha}{l}=\dfrac{y-\beta}{m}=\dfrac{z-\gamma}{n}$ எனவுங் கொள்க.

$V(\alpha, \beta, \gamma)$ கூம்பின் உச்சியாகவும், VA கூம்பின் அச்சாகவும் இருக்கட்டும்.

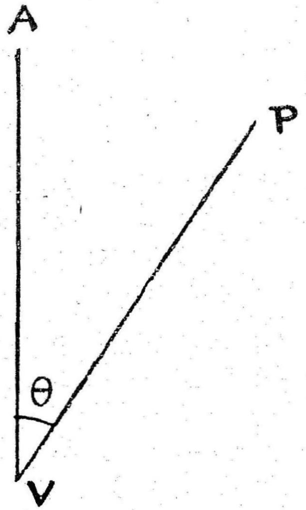
$P(x, y, z)$ கூம்பின் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியென்க.

VP கூம்பின் ஒரு பிறப்பாக்கியாகும்.

VP இன் திசைத் தகவுகள் $(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$ என்றும், அச்சின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) என்றுமுள்ளன,

ஆகவே $\cos\theta = \dfrac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\sqrt{(l^2+m^2+n^2)}\;\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$

இதன் இருபுறமும் வர்க்கமாக்கி ஒழுங்குபடுத்திஞல் கூம்பின் சமன்பாடு பின்வருமாறு அமைகின்றது.



படம் 48

$$[\,l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)\,]^2 = (l^2+m^2+n^2)\;[\,(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\,]\cos^2\theta$$

ஆதி கூம்பின் உச்சியாக அமைந்தால், $\alpha=\beta=\gamma=0$

ஆகவே, கூம்பின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தில் அமைகின்றது.

$$(lx+my+nz)^2=(l^2+m^2+n^2)\;(x^2+y^2+z)^2\cos^2\theta.$$

6·7. இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு கூம்பைக் குறிக்க நிபந்தனையைக் கண்டு, கூம்பின் உச்சியையும் அறிதல்

கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு

$$f(x,y,z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0 \text{ (என்க)} \;\text{———}\; (1)$$

கூம்பின் உச்சியை (x_1, y_1, z_1) எனக் கொள்க.

அச்சுக்களைச் சுழற்றாமல், ஆதியைக் கூம்பின் உச்சிக்கு மாற்றுக.

ஆய எண்களின் நிலை மாற்றத் திட்டம் பின்வருமாறு அமையும்

$$x=X+x_1\ ,\ y=Y+y_1\ ,\ z=Z+z_1$$

மாற்றப்பட்ட சமன்பாடு

$$aX^2+bY^2+cZ^2+2fYZ+2gZX+2hXY+2[X(ax_1+hy_1+gz_1+u)+Y(hx_1+by_1+fz_1+v)+Z(gx_1+fy_1+cz_1+w)]+f(x_1, y_1, z_1)=0 \quad\text{———}(2)$$

புதிய ஆய முறையில் ஆதி உச்சியாக அமைவதால், சமன்பாடு (2) ஒரே படித்தானதாக இருக்கவேண்டும்

$$2[X(ax_1+hy_1+gz_1+u)+Y(hx_1+by_1+fz_1+v)+Z(gx_1+fy_1+cz_1+w)]+f(x_1, y_1, z_4)=0$$

மேற்கண்ட தொடர்பு, X, Y, Z ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருத்தமாக இருக்க வேண்டுமாதலால், அது ஒரு முற்றொருமையாகும்

ஆகவே
$$ax_1+hy_1+gz_1+u=0 \quad\text{———}(i)$$
$$hx_1+by_1+fz_1+v=0 \quad\text{———}(ii)$$
$$gx_1+fy_1+cz_1+w=0 \quad\text{———}(iii)$$
$$f(x_1, y_1, z_1)=0 \quad\text{———}(iv)$$

மேலும்
$$f(x_1, y_1, z_1) = x_1(ax_1+hy_1+gz_1+u)+y_1(hx_1+by_1+fz_1+v)+z_1(gx_1+fy_1+cz_1+w)+(ux_1+vy_1+wz_1+d)$$

முதல் மூன்று முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி, முடிவு (iv) பின்வருமாறு சுருக்கப்படுகிறது

$$ux_1+vy_1+wz_1+d=0 \quad\text{———}(v)$$

தொடர்புகள் (i), (ii), (iii), (v) ஆகியவற்றிலிருந்து x_1, y_1, z_1 முதலியவற்றை நீக்க,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = 0$$

என்பதாகும். இதுவே தேவையான நிபந்தனை.

இதோடு கூட, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} \neq 0$ என்ற நிபந்தனேயும் பொருத்தமாதல் வேண்டும்.

இந்த நிபந்தனே பொருந்துவதானுல், உச்சியின் ஆய எண்கள் சமன்பாடுகள் (i), (ii), (iii) ஆகியவற்றிலிருந்து பெறப்படும்.

குறிப்பு: கொடுத்த பொதுச் சமன்பாட்டை 't' என்ற நான்காவது மாறியைக் கொண்டு ஒரேபடித்தானதாக்குக.

$$f(x, y, z, t) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2uxt+2vyt+2wzt+dt^2$$

$\frac{\delta f}{\delta x}$, $\frac{\delta f}{\delta y}$, $\frac{\delta f}{\delta z}$, $\frac{\delta f}{\delta t}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்களே (Partial derivatives) க் கண்டு, அவற்றில் $t=1$ எனப் பிரதியிட்டால் மேற்கண்ட நான்கு தொடர்புகளேயும் பெறுகிறேம்.

ஆகவே பின்வரும் சமன்பாடுகளில் கூம்பு உச்சியின் ஆய எண்கள் பொருந்துகின்றன என்பதை அறியலாம்.

$$\frac{\delta f}{\delta x}=0\ ;\quad \frac{\delta f}{\delta y}=0\ ;\quad \frac{\delta f}{\delta z}=0\ ;\quad \frac{\delta f}{\delta t}=0$$

இச்சமன்பாடுகளில் எவையேனும் மூன்றை ஒருங்கமையாகத் தீர்த்தால், உச்சியின் ஆய எண்கள் கிடைக்கின்றன.

இச்சமன்பாடுகள் இசைவாக இருக்க வேண்டுமெனில், பின்வரும் நிபந்தனே பொருத்தமாதல் வேண்டும்.

$$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} = 0$$

இதோடு கூட, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ ஆக இருப்பின், கொடுத்த சமன்பாடு இரு தளங்களேக் குறிக்கின்றதாக அமையும்.

6·8. ஒரு கூம்பை நேர்க்கோடு சந்தித்தல்

கூம்பின் சமன்பாட்டை

$f(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ எனவும்,

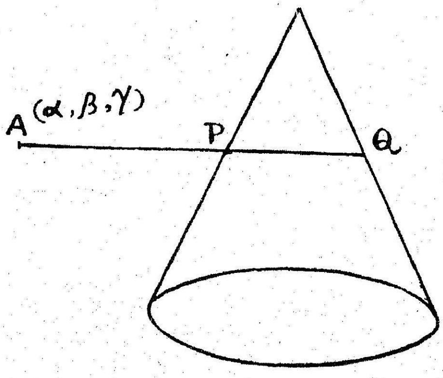
நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளை

$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ எனவுங் கொள்க.

இக்கோட்டின் மேல் அமைந்த யாதானுமொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(\alpha+l\lambda, \beta+m\lambda, \gamma+n\lambda)$ என்ற வடிவத்தில் பெறப்படுகின்றன.

இப்புள்ளி கூம்பின் மேல் அமையுமெனில்,

$f(\alpha+l\lambda, \beta+m\lambda, \gamma+n\lambda)=0$ ஆகும்.



படம் 49

அதாவது, $\lambda^2 f(l, m, n) + 2\lambda\, [l(a\alpha+h\beta+g\gamma)+m(h\alpha+b\beta+f\gamma)+n(g\alpha+f\beta+c\gamma)]+f(\alpha, \beta, \gamma)=0$ ——(1)

இது λ இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், கொடுத்த நேர்க்கோடு கூம்பை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கும் என அறியலாம். மூலங்களின் தன்மையைப் பொருத்து, இப்புள்ளிகள் மெய்யாகவோ, கற்பனையாகவோ அல்லது ஒன்றுபடுவனவாகவோ இருக்கும்.

துணை முடிவு

ஓர் இருபடிக் கூம்பின் தள வெட்டு முகம் (plane section) ஒரு கூம்பு வளைவரை (conic) என அறிகின்றோம். ஏனெனில், தளத்தில்

உள்ள ஒவ்வொரு கோடும் வெட்டு வளைவரையை இரு புள்ளி களில் சந்திக்கின்றது.

குறிப்பு: நேர்க்கோட்டின் திசைக் 'கொசைன்கள் (l, m, n) எனின், சமன்பாடு (1) இன் மூலங்கள் A இலிருந்து சந்திக்கும் புள்ளிகளான P, Q இன் தொலைவுகளாகும்.

6·9. கூம்பின் தொடுகோடும், தொடுதளமும், செங்கோடும்

கூம்பில் $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க் கோடு

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ எனக் கொள்க.} \text{——}(1)$$

கூம்பின் சமன்பாடு

$$f(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0 \text{ என்க.}$$

நேர்க்கோட்டின் மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x_1+\lambda l, y_1+\lambda m, z_1+\lambda n)$ ஆவன.

இப்புள்ளி கூம்பின் மேல் அமையுமானால்,

$$f(x_1+\lambda l, y_1+\lambda m, z_1+\lambda n)=0 \text{ என்றாகும்.}$$

இதிலிருந்து

$$\lambda^2 f(l, m, n)+2\lambda\, [l\,(ax_1+hy_1+gz_1)+m\,(hx_1+by_1+fz_1)+ n(gx_1+fy_1+cz_1)]+f(x_1, y_1, z_1)=0$$

P ஏற்கெனவே கூம்பின் மேல் அமைகின்றது. இந்நேர்க்கோடு P இல் கூம்பைத் தொடுமெனில், இக்கோடு கூம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் Pயோடு ஒன்றுபடும். ஆகவே இச்சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் பூச்சியமாகும்.

$$\text{அதாவது,}\quad l\,(ax_1+hy_1+gz_1)+m(hx_1+by_1+fz_1)+n(gx_1+ fy_1+cz_1)=0 \text{——}(2)$$

$$f(x_1, y_1, z_1)=0 \text{——}(3)$$

P கூம்பின் மேல் அமைவதால் தொடர்பு (3) சரியென்பது புலனாகின்றது. P இல் கூம்பைத் தொடும் கோட்டின் திசைத்தகவு கள் தொடர்பு (2) இன்படி இணைக்கப்படுகின்றதென அறிகிறோம். இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்ட நேர்க்கோட்டையே P இல் கூம்பின்

தொடுகோடு என அழைக்கிறோம். இவ்வாறே P இல் கூம்பைத் தொடும் எல்லா நேர்க்கோடுகளும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. இத்தளமே P இல் கூம்பின் தொடுதளமெனப்படும்.

இதன் சமன்பாட்டை அறிய,

சமன்பாடுகள் (1)க்கும், தொடர்பு (2)க்குமிடையே, (l, m, n) ஆகியவைகளை நீக்க வேண்டும்.

ஆகவே, $(x-x_1)(ax_1+hy_1+gz_1)+(y-y_1)(hx_1+by_1+fz_1)+(z-z_1)(gx_1+fy_1+cz_1)=0$

அதாவது, $axx_1+byy_1+czz_1+f(yz_1+zy_1)+g(zx_1+z_1x)+h(xy_1+x_1y)=ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2fy_1z_1+2gz_1x_1+2hx_1y_1$

தொடர்பு (3) இன்படி வலப்புறம் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$axx_1+byy_1+czz_1+f(yz_1+y_1z)+g(zx_1+z_1x)+h(xy_1+x_1y)=0$$ என்பதே.

இதையே பின்வரும் வடிவத்திலும் எழுதலாம்.

$$x(ax_1+hy_1+gz_1)+y(hx_1+by_1+gz_1)+z(gx_1+fy_1+cz_1)=0$$

இத் தளம் கூம்பின் உச்சி வழியாகச் செல்வதையும், பிறப்பாக்கி OP இத்தளத்தில் முழுமையாக அமைவதையும் அறியலாம். உள்ளபடியே, OP இன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இத்தளம் கூம்பின் தொடுதளமாகின்றது. ஆகவே OP தொடுகைப் பிறப்பாக்கி (Generator of contact) என அழைக்கப்படும்.

P இல் இத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக அமைந்த கோடே P இல் கூம்பின் செங்கோடாகும். தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து செங்கோட்டின் திசைத்தகவுகள் $(ax_1+hy_1+gz_1, hx_1+by_1+fz_1, gx_1+fy_1+cz_1)$ என்பவையே. தொர்டர்பு (2) இன்படி, P இல் கூம்பைத் தொடும் ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் செங்கோடு செங்குத்தாக அமையுமென அறிகிறோம். P இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றன.

$$\frac{x-x_1}{ax_1+hy_1+gz_1}=\frac{y-y_1}{hx_1+by_1+fz_1}=\frac{z-z_1}{gx_1+fy_1+cz_1}$$

6·10. தொடுகைக்குரிய நிபந்தனை

கூம்பு $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ ஐத் தளம் $lx + my + nz = 0$ தொடுவதற்குரிய நிபந்தனையை அறிதல்.

$(x_1\ y_1, z_1)$ என்பதைத் தொடுபுள்ளியாகக் கொள்க. இப் புள்ளியில் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$x(ax_1 + hy_1 + gz_1) + y\,(hx_1 + by_1 + fz_1) + z\,(gx_1 + fy_1 + cz_1) = 0$$

தொடுதளத்தின் கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$lx + my + nz = 0.$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால் அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

ஆகவே,

$$\frac{ax_1 + hy_1 + gz_1}{l} = \frac{hx_1 + by_1 + fz_1}{m} = \frac{gx_1 + fy_1 + cz_1}{n}$$

ஒவ்வொரு விகிதத்தையும் k க்குச் சமமாகக் கொள்க.

$$\therefore\quad ax_1 + hy_1 + gz_1 - lk = 0 \text{———} (\text{i})$$

$$hx_1 + by_1 + fz_1 - mk = 0 \text{———} (\text{ii})$$

$$gx_1 + fy_1 + cz_1 - nk = 0 \text{———} (\text{iii})$$

தொடுபுள்ளி கொடுத்த தளத்தில் அமைவதால்,

$$lx_1 + my_1 + nz_1 = 0$$

i.e., $lx_1 + my_1 + nz_1 - 0 \cdot k = 0$ ——— (iv)

இத் தொடர்புகளிலிருந்து x_1, y_1, z_1, k ஆகியவற்றை நீக்குக. பின்வரும் நீக்கற்பலன் கிடைக்கின்றது.

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே தேவையான நிபந்தனையாகும்.

இவ்வணிக்கோவையை விரித்தெழுதினல்,

$$Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm=0$$ ஆகும்.

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையில் A, B, C, F, G, H ஆகியவை முறையே a, b, c, f, g, h இன் துணைக் காரணிகளாகும்.

அதாவது $A=bc-f^2$,..............

6·11. தலைகீழ்க் கூம்புகள் (Reciprocal cones)

ஒரு கூம்பின் உச்சி வழி அதன் தொடுதளங்களுக்கு வரையப் படும் செங்கோடுகளின் இயங்குவரையைக் காணல்

கூம்பின் சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ ——(1) எனக் கொள்க.

இக் கூம்பிற்கு $lx+my+nz=0$ ஒரு தொடுதளமெனில், தொடுகை நிபந்தனையின்படி,

$$Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm=0 \quad \text{——(2)}$$

கூம்பின் உச்சி வழி இத் தொடுதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடு

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$ ஆகும். ——(3)

தொடர்பு (2) இன்படி, செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் ஒரேபடித்தான சமன்பாட்டில் பொருந்துவதால், இக் கோடு பின்வரும் கூம்பின்மேல் அமைகின்றது.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0 \quad \text{——(4)}$$

இதுவே தேவையான இயங்குவரையாகும். இது ஆதியில் உச்சியைக்கொண்ட இருபடிக் கூம்பு.

இதே முறையில் இரண்டாவது கூம்பின் உச்சியில் கூம்பின் தொடுதளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் இயங்கு வரை

$$A'x^2+B'y^2+C'z^2+2F'yz+2G'zx+2H'xy=0$$ என்பதே—(5)

அணிக்கோவை $\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$ இன் விரிவில் $A', B', C', \ldots\ldots$ என்பவை முறையே $A, B, C, \ldots\ldots$ இன் துணைக் காரணிகளாகும்.

$\triangle = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ எனில், $A' = BC - F^2 = a\triangle$; $B' = b\triangle$; $C' = C\triangle$; $F' = f\triangle$; $G' = g\triangle$; $H' = h\triangle$.

ஆகவே சமன்பாடு (5) பின்வரும் வடிவத்தில் அமைகிறது.

$$\triangle(ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy)=0$$

கொடுத்த சமன்பாடு இரு தளங்களைக் குறிக்கவில்லையாதலால்,

$$\triangle \neq 0.$$

ஆகவே சமன்பாடு (5), கொடுத்த கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

சமன்பாடுகள் (1), (4) ஆகியவற்றால் குறிக்கப்படும் கூம்புகள் தலைகீழ்க் கூம்புகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

6·12. ஒரு கூம்பிற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் அமைய நிபந்தனை அறிதல்

கூம்பின் சமன்பாடு

$$f(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

எனக் கொள்க.

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகளின் திசைக் கொசைன்கள் (l_i, m_i, n_i), $i = 1, 2, 3$ என்க.

இக்கோடுகளின் திசைக் கொசைன்கள் கூம்பின் சமன்பாட்டில் பொருந்துகின்றன.

$$\therefore \quad f(l_i, m_i, n_i) = 0, \; i = 1, 2, 3$$

அதாவது,

$$al_1^2+bm_1^2+cn_1^2+2fm_1n_1+2gn_1l_1+2hl_1m_1=0$$
$$al_2^2+bm_2^2+cn_2^2+2fm_2n_2+2gn_2l_2+2hl_2m_2=0$$
$$al_3^2+bm_3^2+cn_3^2+2fm_3n_3+2gn_3l_3+2hl_3m_3=0$$

இவற்றைக் கூட்டுக.

$$a\Sigma l_1{}^2+b\Sigma m_1{}^2+c\Sigma n_1{}^2+2f\Sigma m_1n_1+2g\Sigma n_1l_1+2h\Sigma l_1m_1=0$$

ஏற்கெனவே தெரிந்த முடிவுகளின்படி,

$$\Sigma l_1{}^2=\Sigma m_1{}^2=\Sigma n_1{}^2=1$$

$$\Sigma m_1n_1=\Sigma n_1l_1=\Sigma l_1m_1=0$$

ஆகவே, $a+b+c=0$ என்பது தேவையான நிபந்தனையாகக் கிடைக்கின்றது.

துணைமுடிவு

கூம்பு $f(x, y, z)=0$ க்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்கள் அமைய நிபந்தனை அறிதல்.

கொடுக்கப்பட்ட கூம்பிற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்கள் இருக்குமெனில், அதன் தலைகீழ்க் கூம்பிற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் அமையும்.

கூம்பு $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ க்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் அமைய நிபந்தனை, $A+B+C=0$ என்பதே.

அதாவது, $(bc-f^2)+(ca-g^2)+(ab-h^2)=0$

i.e., $bc+ca+ab=f^2+g^2+h^2$

6·13. ஒரேபடித்தான இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பைக் குறிக்க நிபந்தனைகள் காணல்

$$f(x, y, z)\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$$

θ ஐ அரை உச்சிக் கோணமாகவும், $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ஐ அச்சாகவும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பை இச்சமன்பாடு குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

கொடுத்த சமன்பாடு பின்வரும் சமன்பாட்டிற்கு முழுது மொத்ததாக இருக்கவேண்டும்.

$$(x^2+y^2+z^2)(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta-(lx+my+nz)^2=0$$

இரு சமன்பாடுகளிலும் $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களை ஒப்பிடுக.

$$\frac{l^2-(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta}{a} = \frac{m^2-(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta}{b} =$$

$$\frac{n^2-(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta}{c} = \frac{mn}{f} = \frac{nl}{g} = \frac{lm}{h} \quad \text{—— (1)}$$

இவற்றிலிருந்து மூன்று தெரியாக் கணியங்களைக் கொண்ட ஐந்து சாரா (independent)ச் சமன்பாடுகளை அமைக்க முடியும். அக்கணியங்களாவன θ, விகிதங்கள் $l : m : n$ ஆகியவையே.

இவற்றை நீக்கினல், பின்வரும் இரு நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன.

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு விகிதமும் $\dfrac{lmn}{\lambda}$ என்க.

ஆகவே, $l = \dfrac{\lambda}{f}$; $m = \dfrac{\lambda}{g}$; $n = \dfrac{\lambda}{h}$

$$\frac{l^2-(l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta}{a} = \frac{lmn}{\lambda}$$

l, m, n என்பவைகளுக்குப் பிரதியிட,

$$\frac{1}{f^2} - \left(\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}\right)\cos^2\theta = \frac{a}{fgh} \text{ என்றாகும்.}$$

அதாவது $fgh\left(\dfrac{1}{f^2}+\dfrac{1}{g^2}+\dfrac{1}{h^2}\right)\cos^2\theta = \dfrac{gh-af}{f}$ —— (2)

இதேபோல, தொடர்புகள் (1) இல் இரண்டாம், மூன்றும் விகிதங்களிலிருந்து;

$$fgh\left(\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}\right)\cos^2\theta = \frac{hf-bg}{g} \text{ எனவும்,}$$

$$fgh\left(\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}\right)\cos^2\theta = \frac{fg-ch}{h} \text{ எனவும்}$$

அறியலாம்.

$$\therefore \frac{gh-af}{f} = \frac{hf-bg}{g} = \frac{fg-ch}{h}$$

உட்பிரிவு 6·10 இல் உள்ள குறியீட்டின்படி இவற்றைப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$\frac{F}{f} = \frac{G}{g} = \frac{H}{h}$ என்பவையே தேவையான இரு நிபந்தனைகளாகும்.

இந்த நிபந்தனைகள் பொருந்துவதாயின், கூம்பின் அச்சு $fx = gy = hz$ என்றாகும்.

தொடர்பு (2) இலிருந்து, அரை உச்சிக் கோணத்தைக் கணக்கிடலாம்.

6·14. ஒரு தளம் ஒரு கூம்பை வெட்டும் இரு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை அறிதல்

தளத்தின் சமன்பாடு $ux+vy+wz=0$ எனவும்,

கூம்பின் சமன்பாடு $f(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ எனவும் கொள்க.

தளம் கூம்பை வெட்டும் இரு கோடுகளில் ஒன்றை $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ என்க.

இக்கோடு தளத்தின் மேலும் கூம்பின் மேலும் அமைவதால், பின்வரும் இரு தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$ul+vm+wn=0$ ——(1)

$al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm=0$ ———(2)

இவற்றிற்கிடையில் n ஐ நீக்கினால், $al^2+bm^2+c\left(\frac{ul+vm}{w}\right)^2 -2(fm+gl)\left(\frac{ul+vm}{w}\right)+2hlm=0$ என்றாகும்.

அதாவது,

$$\left(\frac{l}{m}\right)^2 (aw^2+cu^2-2guv)+2\left(\frac{l}{m}\right)(cuv+hw^2-fuw-gvw) +(bw^2+cv^2-2fvw)=0 \text{ ———(3)}$$

இது $\frac{l}{m}$ இல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும். இதன் இரு

மதிப்புக்களை $u\dfrac{l}{m}+v+w\dfrac{n}{m}=0$ என்பதில் பிரதியிட $\dfrac{n}{m}$ இன் இரு மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

தளம் கூம்பை வெட்டும் இரு கோடுகளின் திசைக் தகவுகள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) எனில், சமன்பாடு (3) இலிருந்து பின் வரும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\frac{l_1}{m_1}+\frac{l_2}{m_2}=-\frac{2(cuv+hw^2-fuw-gvw)}{aw^2+cu^2-2guw}$$

$$\frac{l_1\, l_2}{m_1\, m_2}=\frac{bw^2+cv^2-2fvw}{aw^2+cu^2-2guw}$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{l_1l_2}{bw^2+cv^2-2fvw}=\frac{m_1m_2}{aw^2+cu^2-2\,guw}=\frac{l_1m_2+l_2m_1}{-2(cuv+hw^2-fuw-gvw)}$$

$$=\frac{l_1m_2-l_2m_1}{\pm\,2[(cuv+hw^2+\ldots)^2-(bw^2+\ldots)\,(aw^2+\ldots)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{l_1m_2-l_2m_1}{\pm\,2wP}$$

இதில் $P^2=\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

இதேபோல மற்ற முடிவுகளையும் சமச்சீரின்படி எழுதுக.

$$\frac{l_1\, l_2}{bw^2+cv^2-2fvw}=\frac{m_1\, m_2}{aw^2+cu^2-2guw}=\frac{n_1n_2}{av^2+bu^2-2huv}$$

$$=\frac{l_1m_2-l_2m_1}{\pm\,2wP}=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{\pm\,2uP}=\frac{n_1l_2-n_2l_1}{\pm\,2vP}$$

அதாவது,

$$\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{(a+b+c)\,(u^2+v^2+w^3)-f(u,v,w)}=\frac{\sqrt{\Sigma(l_1m_2-l_2m_1)^2}}{\pm\,2(u^2+v_2+w^2)^{\frac{1}{2}}P}$$

இந்தக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\frac{\cos\theta}{(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-f(u,v,w)} = \frac{\sin\theta}{\pm 2(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}P}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\pm 2(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}P}{(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-f(u,v,w)}$$

துணை முடிவு **(1)**

இக் கோடுகள் செங்குத்தாக இருக்குமேயெனில்,

$$\theta = 90^\circ$$

$$i.e., \quad \tan\theta = \infty$$

$$\therefore \quad (a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-f(u,v,w)=0$$

துணை முடிவு **(2)**

இரு கோடுகளும் ஒன்றுபடுமெனில்,

$$\theta = 0^\circ \text{ (அ.) } 180^\circ$$

$$i.e., \quad \tan\theta = 0$$

$$\therefore \quad \pm 2(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}} P = 0$$

$u^2+v^2+w^2 \neq 0$ என்பதால், $P=0$

அதாவது $$\begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

இதுவே, கொடுத்த தளம் கூம்பைத் தொடுவதற்குரிய நிபந்தனை என்பதை அறிவோம்.

துணை முடிவு **(3)**

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் கூம்பிற்கு அமைய நிபந்தனையை உய்த்தறியலாம்.

கொடுத்த தளம் கூம்பை வெட்டும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் செங்கோணமாக இருப்பதோடு, கூம்பின் உச்சியில் தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடும் கூம்பிற்கு ஒரு பிறப்பாக்கியாகின்றது.

அதாவது $\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}$ என்ற நேர்க்கோடும் கூம்பிற்கு ஒரு பிறப்பாக்கியாகும்.

ஆகவே, $f(u, v, w)=0$

துணை முடிவு (1) இன்படி

$$(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)-f(u, v, w)=0$$

$u^2+v^2+w^2 \neq 0$ என்பதால்,

$a+b+c=0$ என்பது தேவையான நிபந்தனையாகும்.

இந்த நிபந்தனை பொருந்துமானால், இம்மாதிரி ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று பிறப்பாக்கிகளின் கணங்கள் (**Sets**) முடிவிலாதிருக்குமென அறியலாம்.

ஏனெனில், $ux+vy+wz=0$ என்ற ஏதாவதொரு தளத்தின் செங்கோடு, கூம்பு $f(x, y, z)=0$ இன் பிறப்பாக்கியாக இருப்பின் $f(u,v,w)=0$ ஆகும்.

எனவே, நிபந்தனை $(a+b+c)(u^2+v^2+w^2)=f(u,v,w)$, கெழுக்கள் u, v, w இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்தும்.

அதாவது, ஒரு பிறப்பாக்கிக்குச் செங்குத்தாக உள்ள தளம் எப்போதும் கூம்பை இரு செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுகின்றது என்பது இதனால் அறியப்படுகிறது. இவ்விதமாக ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள மூன்று பிறப்பாக்கிகளின் கணங்கள் முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ளவையென அறிகிறோம்.

6·15. பொதுவான உச்சியைக் கொண்ட இரு கூம்புகள் வெட்டிக் கொள்ளுதல்

ஒரே உச்சியையுடைய இரு கூம்புகளில் ஒரு தளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகங்கள் இரு கூம்பு வளைவரைகளாகும். இவ்வளைவரைகள் பொதுவாக நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்ளுகின்றன. இந்த நான்கு புள்ளிகளையும் உச்சியோடு சேர்க்கும் கோடுகள் இரு கூம்புகளுக்கும் பொதுவான பிறப்பாக்கிகளாகும். ஆகவே ஒரே உச்சிகளைக் கொண்ட இரு கூம்புகள் பொதுவாக நான்கு பொதுப் பிறப்பாக்கிகளை உடைத்தாயிருக்கின்றன.

ஒரே உச்சியையுடைய இரு கூம்புகளுக்கு ஐந்து பொதுப் பிறப்பாக்கிகள் அமையுமெனில், இவையிரண்டும் ஒன்றுபடும்.

$S=0$, $S'=0$ என்ற சமன்பாடுகள் ஆதியில் உச்சியையுடைய இரு கூம்புகளைக் குறிக்குமெனில், ஆதியை உச்சியாகக் கொண்டு இக்கூம்புகளின் நான்கு பொதுப்பிறப்பாக்கிகளின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு

$S+kS'=0$ (k யாதானுமொரு மாறிலி) என்பதாகும்.

கோவை $S+kS'$ இரு ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்படியாக k இன் மதிப்பு தெரிந்து கொள்ளப் படுமெனில், சமன்பாடு $S+kS'=0$ இந்நான்கு பொதுப் பிறப்பாக்கிகள் அமைந்த இருதளங்களைக் குறிக்கும்.

$$S\equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$$

$$S'\equiv a'x^2+b'y^2+c'z^2+2f'yz+2g'zx+2h'xy$$

$$S+kS'\equiv(a+ka')x^2+(b+kb')y^2+(c+kc')z^2+2(f+kf')yz+2(g+kg')zx+2(h+kh')xy$$

$S+kS'=0$ இருதளங்களைக் குறிக்கவேண்டுமென்றால்,

$$\begin{vmatrix} a+ka' & h+kh' & g+kg' \\ h+kh' & b+kb' & f+kf' \\ g+kg' & f+kf' & c+kc' \end{vmatrix}=0 \text{ என்றாகும்.}$$

இது k இல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், k இன் மூன்று மதிப்புக்களுக்கும், சமன்பாடு $S+kS'=0$ நான்கு பொதுப் பிறப்பாக்கிகள் வழியாகச் செல்லும் மூன்று சோடித் தளங்களைத் தரும்.

6·16. உருளை (cylinder)

வரையறை

ஒரு நிலைத்த நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக கொடுத்த வளை வரையைச் சந்திக்கும்படியாகவோ அல்லது கொடுத்த மேற்பரப்பைத் தொடும்படியாகவோ அமைந்த நேர்க்கோட்டினால் பிறப்பிக்கப்படும் மேற்பரப்பே உருளை எனப்படும்.

கொடுத்த வளைவரை உருளையின் வழிகாட்டு வளைவரை **(guiding curve)** எனவும், நிலைத்த கோடு உருளையின் அச்சு எனவும் அழைக்கப்படும். ஒரு கூம்பின் உச்சி கந்தழியில் இருக்குமெனில், அது உருளையாகும். கொடுத்த வளைவரை ஒரு வட்டமாகவும், அதன் மையத்தில் வட்டத்தின் தளத்திற்கு அமைந்த

செங்கோடு அச்சாகவும் இருப்பின் உருளை, நேர் வட்ட உருளை யென அழைக்கப்படும்.

6·17. ஓர் உருளையின் பிறப்பாக்கிகள் $f(x,y)=0$; $z=0$ என்ற கூம்பு வளைவரையைச் சந்திப்பனவாகவும், (l, m, n) என்ற திசைக்கு இணையாகவும் இருப்பின், அவ்வுருளையின் சமன்பாட்டை அறிதல்

$$f(x, y) \equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \text{ (என்க)}$$

உருளையின் ஒரு பிறப்பாக்கியில் புள்ளி $P(x_1, y_1, z_1)$ ஐ எடுத்துக் கொள்க. இப்பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ ஆவன.}$$

இக்கோட்டின் மேல் ஏதாகிலுமொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x_1+\lambda l, y_1+\lambda m, z_1+\lambda n)$ என்பன.

இப்புள்ளி வளைவரையின்மேல் அமைந்தால்,

$$f(x_1+\lambda l, y_1+\lambda m)=0 \text{———(i)}$$

$$z_1+\lambda n=0 \text{———(ii)}$$

$$\therefore \lambda = -\frac{z_1}{n}$$

இதை முதல் தொடர்பில் பிரதியிட

$$f\left(x_1-\frac{lz_1}{n}, y_1-\frac{mz_1}{n}\right) = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

P இன் இயங்குவரையே தேவையான உருளையாகும்.

ஆகவே, உருளையின் சமன்பாடு $f\left(x-\dfrac{lz}{n}, y-\dfrac{mz}{n}\right)=0$ என்பதே.

துணை முடிவு

இவ்வுருளையின் பிறப்பாக்கிகள் Z அச்சுக்கு இணையாக அமையுமெனில், $l=0=m$; $n=1$ ஆவன.

ஆகவே, உருளையின் சமன்பாடு $f(x, y)=0$ ஆகும்.

6·18. நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டைக் காணல்

உருளையின் அச்சு $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ எனவும், ஆரம் a எனவுங் கொள்க.

$P(x, y, z)$ உருளையின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியென்க.

P இலிருந்து அச்சுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் உருளையின் ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது,
$$[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2] - \frac{\{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)\}^2}{(l^2+m^2+n^2)} = a^2$$

இதுவே உருளையின் தேவையான சமன்பாடாகும்.

துணை முடிவு

உருளையின் அச்சு Z அச்சு ஆயின், $l=0=m$; $n=1$ ஆகவும் $\alpha=\beta=\gamma=0$ ஆகவும் பிரதியிடுக.

உருளையின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$ என்றாகும்.

6·19. தழுவு உருளை (enveloping cylinder)

ஓர் உருளையின் பிறப்பாக்கிகள் கோளம் $x^2+y^2+z^2=a^2$ ஐத் தொடுவனவாகவும், $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமைந்தால், உருளையின் சமன்பாட்டைக்காணல்

$P(x_1, y_1, z_1)$ உருளையின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியெனக் கொள்க.

P இன் வழிச் செல்லும் பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடுகள்
$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$ ஆவன.

இக்கோடு கொடுத்த கோளத்தைத் தொடுமெனில்,
$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2) - \frac{(lx_1+my_1+nz_1)^2}{(l^2+m^2+n^2)} = a^2$$

அதாவது $(x_1^2+y_1^2+z_1^2-a^2) = \frac{(lx_1+my_1+nz_1)^2}{(l^2+m^2+n^2)}$

ஆகவே, P இன் இயங்குவரை

$$(l^2+m^2+n^2)\ (x^2+y^2+z^2-a^2)=(lx+my+nz)^2$$ எனவாகும்.

இதுவே தேவையான உருளையின் சமன்பாடாகும். இது கோளத்தின் தழுவு உருளை என அழைக்கப்படும்.

மாதிரி 1 : ஆதியை உச்சியாகவும் கூம்பு வளைவரை $ax^2+by^2+cz^2=1$; $lx+my+nz+p=0$ ஐ அடி வளைவரையாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$
$$lx+my+nz+p=0$$

தளத்தின் சமன்பாட்டைக்கொண்டு மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை ஒரேபடித்தானதாக்கினால், தேவையான கூம்பின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

தளத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து $\dfrac{lx+my+nz}{-p}=1$

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது :

$$ax^2+by^2+cz^2=1^2$$

ஒரேபடித்தானதாக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$ax^2+by^2+cz^2=\left(\frac{lx+my+nz}{-p}\right)^2$$

ஆகவே தேவையான கூம்பின் சமன்பாடு

$$p^2\ (ax^2+by^2+cz^2)=(lx+my+nz)^2$$ என்பதே.

மாதிரி 2 : சமன்பாடு $4x^2-y^2+2z^2+2xy-3yz+12x-11y+6z+4=0$, புள்ளி $(-1, -2, -3)$ ஐ உச்சியாகக் கொண்ட கூம்பைக் குறிக்கின்றது எனக் காட்டுக.

இச் சமன்பாட்டை ஒரேபடித்தானதாக்கினால்,

$$f\ (x, y, z, t)=4x^2-y^2+2z^2+2xy-3yz+12xt-11yt+6zt+4t^2.$$

x, y, z, t ஆகியவற்றைப் பொருத்து இச் சார்பின் பகுதி வகைக் கெழுக்களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமமாக்க, பின்வரும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$8x+2y+12t=0$$
$$2x-2y-3z-11t=0$$
$$-3y+4z+6t=0$$
$$12x-11y+6z+8t=0$$

$t=1$ எனப் பிரதியிட்டு, முதல் மூன்று சமன்பாடுகளையும் தீர்த்தால், $x=-1$, $y=-2$, $z=-3$ என்ற மதிப்புக்களை அடைகின்றோம். இவை நான்காவது சமன்பாட்டில் பொருந்துவதை அறியலாம். ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $(-1, -2, -3)$ என்ற புள்ளியில் உச்சியைக்கொண்ட கூம்பைக் குறிக்கின்றது.

மாதிரி 3 : சமன்பாடு $33x^2+13y^2-95z^2-144yz-96zx-48xy=0$ ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பைக் குறிக்கின்றதென நிறுவி, அதன் அச்சு $3x=2y=z$ என்று காட்டுக. அதன் உச்சிக் கோணத்தையும் காண்க.

உட்பிரிவு 6·13 இன்படி, கொடுத்த சமன்பாடு ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பைக் குறிக்க வேண்டுமெனில், பின்வரும் நிபந்தனைகள் பொருத்தமாதல் வேண்டும்.

$$\frac{gh-af}{f}=\frac{hf-bg}{g}=\frac{fg-ch}{h}$$

$$\frac{gh-af}{f}=\frac{48\times24+33\times72}{-72}=-49$$

$$\frac{hf-bg}{g}=\frac{24\times72+13\times48}{-48}=-49$$

$$\frac{fg-ch}{h}=\frac{72\times48-95\times24}{-24}=-49$$

ஆகவே கொடுத்த சமன்பாடு ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பைக் குறிக்கின்றதென அறியலாம்.

இக் கூம்பின் அச்சுக்குரிய சமன்பாடுகள் $fx=gy=hz$ ஆவன.

$$\therefore\quad -72x=-48y=-24z$$

i. e., $3x=2y=z$ என்பவை அச்சின் சமன்பாடுகளாகும்.

இக் கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் θ எனில், பின்வரும் தொடர்பின் மூலம் θ இன் மதிப்பை அறியலாம்.

$$fgh\left(\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}+\frac{1}{h^2}\right)\cos^2\theta=\frac{gh-af}{f}$$

$$72\times48\times24\left(\frac{1}{72^2}+\frac{1}{48^2}+\frac{1}{24^2}\right)\cos^2\theta=49$$

$i.\ e.,\quad 56\cos^2\theta=49$

$i.\ e.,\quad \cos^2\theta=\frac{7}{8}$

$i.\ e.,\quad \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

θ குறுங்கோணமாக இருப்பதால், $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

மாதிரி 4: தளம் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, ஆய அச்சுகளை முறையே A, B, C என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. A, B, C வழிச் செல்லும் வட்டத்தைச் சந்திக்கும்படி ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் கோடுகளால் பிறப்பிக்கப்படும் கூம்பு

$$yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$$ என நிறுவுக.

கோளம் $OABC$ இன் சமன்பாடு

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ என்றாகும்.

ஆகவே கொடுத்துள்ள வட்டம் பின்வரும் சமன்பாடுகளினால் தரப்படும்.

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

கோளத்தின் சமன்பாட்டைத் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் கொண்டு ஒரேபடித்தானதாக்கினால் தேவையான கூம்பின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதாவது,

$$x^2+y^2+z^2-(ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0$$

i. e., $yz\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+zx\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=0$

மாதிரி 5 : கூம்பு $yz+zx+xy=0$ ஐத் தளம் $ax+by+cz=0$ செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுமெனில், $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ என நிறுவுக.

தளம் கூம்பை வெட்டுங் கோடுகளில் ஒன்றின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) என்க.

பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$al+bm+cn=0$$
$$mn+nl+lm=0$$

இவற்றிலிருந்து n ஐ நீக்கினல்,

$$a\left(\frac{l}{m}\right)^2+(a+b-c)\left(\frac{l}{m}\right)+b=0 \text{ என்ருகும்.}$$

இரு கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) என்ருல்,

$\frac{l_1}{m_1}$; $\frac{l_2}{m_2}$ ஆகியவை இவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$$\therefore \frac{l_1}{m_1}\cdot\frac{l_2}{m_2}=\frac{b}{a}$$

அதாவது,

$$\frac{l_1 l_2}{1/a}=\frac{m_1 m_2}{1/b}$$

அதே போல், $\frac{m_1m_2}{1/b}=\frac{n_1n_2}{1/c}$

$$\therefore \frac{l_1l_2}{1/a}=\frac{m_1m_2}{1/b}=\frac{n_1n_2}{1/c}$$

இக்கோடுகள் செங்குத்தாக அமைய வேண்டுமெனில்,

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

மாதிரி **6 :** $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$ என்பது ஆயத்தளங்களைத் தொடும் கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு எனக் காட்டுக.

ஆயத்தளங்களைத் தொடும் கூம்பின் தலைகீழ்க் கூம்பு ஆய அச்சுகளின் வழியே செல்லும்.

ஆய அச்சுகளைப் பிறப்பாக்கிகளாகக் கொண்ட கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு $fyz+gzx+hxy=0$ ஆகும்.

இதன் தலைகீழ்க் கூம்பு (உட்பிரிவு 6·11 இன்படி)

$$-f^2x^2-g^2y^2-h^2z^2+2ghyz+2hfzx+2fgxy=0$$

அதாவது $(fx+gy-hz)^2=4fgxy$

$$i.e., \quad fx + gy - hz = \pm 2\sqrt{fgxy}$$

$$i.e., \quad fx + gy \mp 2\sqrt{fgxy} = hz$$

$$i.e., \quad \left(\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy}\right)^2 = hz$$

$$i.e., \quad \sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} = \mp hz$$

ஆகவே, $\sqrt{fx} \pm \sqrt{gy} \pm \sqrt{hz} = 0$ தேவையான சமன்பாடாகும்.

மாதிரி **7 :** கூம்பு $4x^2-y^2+3z^2=0$ ஐத் தளம் $2x+y-z=0$ வெட்டும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. இக்கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தையும் அறிக.

இவற்றுள் ஒரு கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (l, m, n) என்றால் பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$4l^2-m^2+3n^2=0 \text{———} (1)$$

$$2l+m-n=0 \text{———} (2)$$

இத்தொடர்புகளுக்கிடையே n ஐ நீக்க,

$16l^2+12lm+2m^2=0$ என்றாகும்.

அதாவது $8\left(\frac{l}{m}\right)^2+6\left(\frac{l}{m}\right)+1=0$ ——— (3)

தளம் கூம்பை வெட்டுங் கோடுகளின் திசைத் தகவுகள் (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) எனில்,

சமன்பாடு (3) இன் மூலங்கள் $\frac{l_1}{m_1}$, $\frac{l_2}{m_2}$ ஆகும்.

$$\frac{l_1}{m_1} = -\tfrac{1}{2}\,; \quad \frac{l_2}{m_2} = -\tfrac{1}{4}$$

தொடர்பு (2) இலிருந்து,

$$2\frac{l}{m} + 1 - \frac{n}{m} = 0$$

$$\therefore \frac{n_1}{m_1} = 0\,; \quad \frac{n_2}{m_2} = \tfrac{1}{2}$$

ஆகவே $\frac{l_1}{-1} = \frac{m_1}{2} = \frac{n_1}{0}$ எனவும்;

$\frac{l_2}{-1} = \frac{m_2}{4} = \frac{n_2}{2}$ எனவும் ஆகும்.

ஆகவே கோடுகளின் தேவையான சமன்பாடுகள்

$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}\,; \quad \frac{x}{-1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ என்பன.

இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\cos\theta = \frac{1+8+0}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{21}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{105}}\right)$$

மாதிரி 8: கூம்புகள் $3yz - 2zx + 2xy = 0$, $21x^2 - 4y^2 - z^2 = 0$ ஆகியவற்றை $3x - 2y - z = 0$ என்ற தளம் செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுகின்றது எனக் காட்டுக.

மற்ற இரண்டு பொதுப் பிறப்பாக்கிகளும் $7x + 2y + 5z = 0$ என்ற தளத்தில் அமையுமெனவும் நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட கூம்புகளுக்குப் பொதுவாயுள்ள நான்கு பிறப்பாக்கிகளின் வழியாகச் செல்லும் கூம்பின் பொதுவான சமன்பாடு $21x^2 - 4y^2 - z^2 + \lambda(3yz - 2zx + 2xy) = 0$ ஆகும்.——(1)

சமன்பாடு (1) இரு தளங்களைக் குறிக்குமாறு λ இன் மதிப்புக்களை ஆராய்வோம்.

$(3x-2y-z)$ $(7x+2y+5z)$ என்பதைச் சமன்பாடு (1) இன் இடப்புறமுள்ள கோவையோடு ஒப்பு நோக்கினால், $\lambda=-4$ என அறியலாம்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட இரு தளங்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$21x^2-4y^2-z^2-12yz+8zx-8xy=0$$

இவற்றின் தனித்த சமன்பாடுகள்

$3x-2y-z=0$, $7x+2y+5z=0$ ஆவன.

கூம்பு $3yz-2zx+2xy=0$ ஐத் தளம் $3x-2y-z=0$ செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுமெனில்,

$(a+b+c)$ $(u^2+v^2+w^2)-f(u, v, w)=0$ ஆகவேண்டும். (உட்பிரிவு 6·14 இன்படி)

$a=0$; $b=0$; $c=0$; $u=3$; $v=-2$; $w=-1$

$$(a+b+c)\ (u^2+v^2+w^2)-f(u, v, w)=0-(6+6-12)$$
$$=0$$

ஆகவே, தளம் $3x-2y-z=0$ கொடுக்கப்பட்ட கூம்புகளைச் செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுகின்றது.

மாதிரி 9 : ஓர் இருபடி உருளையின் பிறப்பாக்கிகள் Z அச்சுக்கு இணையாக அமைந்து, வளைவரை $ax^2+by^2=2z$; $lx+my+nz=p$ ஐச் சந்திக்குமெனில், உருளையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

$$ax^2+by^2=2z \text{———} (1)$$

$$lx+my+nz=p \text{———} (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளுக்கிடையே z ஐ நீக்க, தேவையான உருளையின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

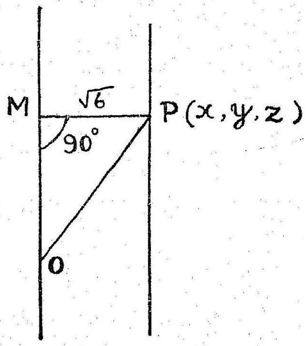
$$ax^2+by^2=2\left(\frac{lx+my-p}{-n}\right)$$

அதாவது, $n\ (ax^2+by^2)+2lx+2my-2p=0$

மாதிரி 10 : ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வழிகாட்டு வட்டம் $x^2+y^2+z^2=9$; $x-y+z=3$ என்றால், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தின் ஆரமே உருளையின் ஆரமாகும். வழக்கமான கணிப்பின்படி, வட்டத்தின் ஆரம் $=\sqrt{6}$ என அறியலாம். உருளையின் அச்சு ஆதியின் வழிச் செல்வதாயும், கொடுத்த தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருப்பதாலும், அதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 50

$P(x, y, z)$, உருளையின்மேல் ஏதாவதொரு புள்ளியெனில்,

$$OP^2-OM^2=PM^2$$

$$(x^2+y^2+z^2)-\left(\frac{x-y+z}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$

i.e., $x^2+y^2+z^2-\frac{1}{3}(x-y+z)^2=6$

எனவே, தேவையான உருளையின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+z^2+xy-zx+yz=9 \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 6

1. புள்ளி (α, β, γ) ஐ உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பின் பிறப்பாக்கிகளுக்குரிய திசைக் கொசைன்கள் $al^2+bm^2+cn^2=0$ என்ற தொடர்பில் பொருந்துமெனில், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. ஆதியை உச்சியாகவும் $y^2+z^2=b^2$; $x=a$ ஐ அடி வளை வரையாகவும் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு $a^2(y^2+z^2)=b^2x^2$ என நிறுவுக.

3. புள்ளி (α, β, γ) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுகள் கூம்பு வளைவரை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=0$ ஐச் சந்திக்குமாயின், அவற்றின் இயங்குவரையைக் காண்க.

4. புள்ளி $(1, 1, 0)$ ஐ உச்சியாகவும், $x^2+y^2=4$; $y=0$ ஐ அடிவளைவரையாகவுங் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டை அறிக.

5. புள்ளி $(1, 2, 3)$ ஐ உச்சியாகவும், வட்டம் $x^2+y^2+z^2=4$; $x+y+z=1$ ஐ வழிகாட்டும் வளைவரையாகவுங் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாடு யாது ?

6. S என்ற கோளமும் α என்ற தளமும் முறையே $\varphi+u+c=0$, $v=1$ என்ற சமன்பாடுகளை உடையனவாயுள்ளன. இதில் $\varphi\equiv x^2+y^2+z^2$; u, v ஆகியவை x, y, z இல் சமப்படித்தான ஒருபடிச் சார்புகள் ; C ஒரு மாறிலி. S, α ஆகியவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளோடு ஆதியைச் சேர்க்கும் கோடுகளைப் பிறப்பாக்கிகளாகக் கொண்ட கூம்பின் சமன்பாட்டினை அறிக.

இக் கூம்பு S ஐ மறுபடியும் சந்திக்கும் புள்ளிகள் β என்ற தளத்தில் அமைகின்றன எனக் காட்டி, β இன் சமன்பாடுகளை u, v, c ஆகியவற்றில் காண்க.

S இன் ஆரம் மாறுபடுகின்றது ; அதன் மையமும், தளம் α உம் நிலைத்தவையெனில், தளம் β ஒரு நிலைத்த கோட்டின் வழியே செல்லும் என நிறுவுக.

7. ஆய அச்சுகள் வழியாகவும், கோடுகள் $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ வழியாகவும் செல்லும் கூம்பின் சமன்பாட்டினை அறிக.

8. சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ ஒரு கூம்பைக் குறிக்க வேண்டுமெனில், $\frac{u^2}{a}+\frac{v^2}{b}+\frac{w^2}{a}=d$ எனக் காட்டுக.

9. ஆதியை உச்சியாகவும், Z அச்சை அச்சாகவும், அரை உச்சிக்கோணம் α ஆகவும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் சமன்பாடு $x^2+y^2=z^2 \tan^2 \alpha$ என நிறுவுக.

10. $3x+4y+z=0$ தளமும், $15x^2-32y^2-7z^2=0$ கூம்பும் வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளை அறிக.

11. பின்வரும் வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகளிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(i) தளம் $x-3y+z=0$; கூம்பு $x^2-5y^2+z^2=0$

(ii) தளம் $4x-y-5z=0$; கூம்பு $8yz+3zx-5xy=0$

(iii) தளம் $x+y+z=0$; கூம்பு $x^2-yz+xy-3z^2=0$

12. கூம்பு $(b-c)x^2+(c-a)y^2+(a-b)z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ ஐத் தளம் $lx+my+nz=0$ செங்குத்துக் கோடுகளில் வெட்டுமெனில், $(b-c)l^2+(c-a)m^2+(a-b)n^2+2fmn+2gnl+2hlm=0$ என நிறுவுக.

13. $x+y+z=0$ தளமும், $ayz+bzx+cxy=0$ கூம்பும் வெட்டிக் கொள்ளும் கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தைப் பொருத்து பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) கோணம் 90° எனின், $a+b+c=0$

(ii) கோணம் 60° எனின், $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

14. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பிற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று பிறப்பாக்கிகள் அமையுமெனில், அதன் அரை உச்சிக்கோணம் $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ எனக் காண்பி.

15. கூம்பு $11yz+6zx-14xy=0$ க்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக அமைந்த மூன்று பிறப்பாக்கிகளில் ஒன்று $x=\frac{1}{2}y=z$ எனில், மற்ற இரண்டு பிறப்பாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் யாவை ?

16. ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள் மையக் கூம்பு வளைவரை $ax^2+by^2=1$, $z=0$ ஐச் சந்திக்கும்படியாக வரையப்படுமெனில், அப்புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

17. கோளம் $x^2+y^2+z^2=r^2$ க்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுகோடுகள் வரையப்படுமென்ருல், அப் புள்ளி $2(x^2+y^2+z^2)=3r^2$ என்ற கோளத்தின்மேல் அமையுமென நிறுவுக.

18. கூம்பு $x^2+2y^2-3z^2+2yz-5zx+3xy=0$ ஐ $(1, 1, 1)$ என்ற திசைத் தகவுகளேயுடைய பிறப்பாக்கியில் தொடும் தளத்தின் சமன்பாட்டை அறிக.

19. கூம்புகள் $ax^2+by^2+cz^2=0$, $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழானவை எனக் காட்டுக.

20. மூன்று ஆயத் தளங்களேயும், பின்வரும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான தளங்களேயும் தொடுவனவாக அமைந்த இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாடு யாது ?

$$x-y+z=0,\ 2x+3y+z=0,\ 4x-y-5z=0$$

21. கூம்புகள் $x^2-2y^2+3z^2-4yz+5zx-6xy=0$, $2x^2-3y^2+4z^2-5yz+6zx-10xy=0$ ஆகியவையின் பொதுப் பிறப்பாக்கிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு, திசைத் தகவுகள் $(1, 1, 1)$ கொண்ட நேர்க்கோட்டின் வழியாகவும் செல்லுமென்ருல், அதன் சமன்பாடு $y^2-2z^2+3yz-4zx+2xy=0$ என நிறுவுக.

22. கூம்புகள் $fyz+gzx+hxy=0$, $ax^2+by^2+cz^2=0$ ஆகியவற்றைத் தளம் $lx+my+nz=0$ சந்திக்கும் கோடுகள் ஒன்றுபடுமெனில்,

$$\frac{bn^2+cm^2}{fmn}=\frac{cl^2+an^2}{gnl}=\frac{am^2+bl^2}{hlm}$$ எனக் காட்டுக.

23. ஓர் உருளேயின் பிறப்பிக்குங்கோடு, $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும், வளேவரை $x^2+y^2=9$; $z=1$ ஐச் சந்திப்பதாகவும் அமைந்தால், அவ்வுருளேயின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

24. ஓர் உருளேயின் பிறப்பாக்கிகள் (l, m, n) என்ற திசைக்கு இணையாக வளேவரை $ax^2+by^2=1$; $z=0$ ஐச் சந்திக்கும்படி அமைந்தால், உருளேயின் சமன்பாடு என்ன ?

25. புள்ளி (a, b, c) ஐ மையமாகவும், r ஐ ஆரமாகவுங் கொண்ட ஒரு கோளத்தைத் தொடும் நேர்வட்ட உருளை யின் பிறப்பாக்கிகள் (l, m, n) திசைக்கு இணையாக இருப்பின், அதன் சமன்பாட்டை அறிக.

26. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் அச்சு $x=2y=-z$ எனவும், ஆரம் 4 ஆகவும் அமைந்தால், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க. இவ்வுருளையில் $z=0$ என்ற தளத்தால் உண் டாகும் வெட்டு முகத்தின் பரப்பு 24π என நிறுவுக.

27. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் 2; புள்ளி $(1, 2, 3)$ வழியாகச் செல்லும் அதன் அச்சின் திசைத் தகவுகள் $(2, -3, 6)$ என்றால், உருளையின் சமன்பாடு என்ன?

28. பிறப்பாக்கிகள் Y அச்சுக்கு இணையாக அமைந்து, வளை வரை $x^2+y^2+2z^2=12$; $x-y+z=1$ ஐச் சந்திக்கு மெனில், உருளையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

29. புள்ளிகள் $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ வழியாகச் செல் லும் வட்டத்தை வழிகாட்டு வளைவரையாகக் கொண்ட நேர்வட்ட உருளையின் சமன்பாட்டை அறிக.

7. மையக் கூம்பு வளையவுருக்கள்
(Central conicoids)

7·1. இருபடியில் மிகப் பொதுவான சமன்பாடு $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$ ஆகும். இதில் பத்து மாறிலிகள் உள. இக் கணியங்களில் ஏதேனும் ஒன்றைக் கொண்டு நெடுகிலும் வகுத்தால், மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை ஒன்பதாகக் குறைகின்றது. ஆகவே இருபடி மேற்பரப்பு ஒன்பது நிபந்தனைகளுக்குட்பட வேண்டியதாயுள்ளது. இவ்வகையைச் சேர்ந்த மேற்பரப்பு ஒவ்வொன்றும் பொருந்துகின்ற ஒவ்வொரு நிபந்தனையும் மாறிலிகளை இணைக்கும் தொடர்பேயாகும். ஒன்பது வடிவ கணித நிபந்தனைகள் மூலமாய் ஒன்பது தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, மேற்பரப்பில் கொடுத்த ஒரு புள்ளி அமைகின்றதென்ற வடிவ கணித நிபந்தனையால் ஒரு தொடர்பு பெறப்படும். எவையேனும் நான்கு புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமையாதவாறு மேற்பரப்பில் அமையும் ஒன்பது புள்ளிகள் தரப்படுமேயெனில் ஒன்பது தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு இரு தளங்களைக் குறிக்குமேயெனில், அது இரு ஒரு படிக் காரணிகளின் பெருக்கற் பலனாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, $F(x, y, z) \equiv ax^2+by^2+cz^2+2fyz+ \dots\dots\dots +2wz+d$ எனில்,

$$F(x, y, z)=(lx+my+nz+p)\ (l'x+m'y+n'z+p')$$

இத்தளங்களுக்கு இணையாக ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் தளங்கள் $(lx+my+nz)(l'x+m'y+n'z)=0$ ஆகும்.

அதாவது, $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$

இச்சமன்பாடு ஆதி வழியாகச் செல்லும் இரு தளங்களைக் குறிக்க நிபந்தனை, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ என அறிவோம்

இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு கோளத்தைக் குறிக்க நிபந்தனைகள், $a=b=c$; $f=g=h=0$ என்பவையே.

மேற்கூறப்பட்ட நிபந்தனைகள் பொருந்தவில்லையென்றால், இச்சமன்பாடு ஒரு கூம்பு வளையவுருவை அல்லது இருபடி மேற்பரப்பைக் குறிக்கும்.

7·2. இருபடிப் பொதுச் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும் மேற்பரப்பை ஒரு நேர்க்கோடு சந்திக்கும் புள்ளிகளைக் காணல்

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளைப் பின்வரும் சமச் சீரான வடிவத்தில் கொள்க.

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}=r$$

இக்கோட்டின் மேலமைந்த ஏதாவதொரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(\alpha+lr,\ \beta+mr,\ \gamma+nr)$ ஆவன.

இப்புள்ளி கொடுத்த மேற்பரப்பில் அமையுமெனில்,

$$a(\alpha+lr)^2+b(\beta+mr)^2+c(\gamma+nr)^2+2f(\beta+mr)(\gamma+nr)+\ldots\ldots\ldots+d=0$$

மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டில் இடப்புறம் உள்ள கோவையை $F(x, y, z)$ எனக் குறியிட்டால், மேற்கண்ட தொடர்பு பின் வருமாறு எழுதப்படலாம்.

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm)+$$
$$r\left\{l\frac{\delta F}{\delta\alpha}+m\frac{\delta F}{\delta\beta}+n\frac{\delta F}{\delta\gamma}\right\}+F(\alpha,\beta,\gamma)=0 \quad \text{——(1)}$$

இது r இல் இருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், நேர்க்கோடு மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

ஏதாவதொரு குறிப்பிட்ட தளத்தில் அமையும் நேர்க்கோடுகள் ஒவ்வொன்றும் மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. ஆகவே இருபடி மேற்பரப்பின் எல்லாத் தள வெட்டு முகங்களும் **(plane sections)** கூம்பு வளைவரைகளாகும். இதன் காரணமாகவே, இருபடி மேற்பரப்புகள் பொதுவாகக் கூம்பு வளையவுருக்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

7·3. கூம்பு வளையவுருவின் தொடுதளத்திற்குரிய சமன்பாட்டை அறிதல்

நேர்க்கோடு $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n} = r$, மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

இக்கோடு கூம்பு வளையவுரு $F(x, y, z)=0$ ஐ $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடுமேயெனில், பின்வரும் இருபடிச் சமன் பாட்டின் இரு மூலங்களும் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும்.

$$r^2(al^2+bm^2+cn^2+2fmn+2gnl+2hlm)+ r\left\{ l\frac{\delta F}{\delta x_1} + m\frac{\delta F}{\delta y_1} + n\frac{\delta F}{\delta z_1}\right\} + F(x_1, y_1, z_1)=0 \quad\text{——}(1)$$

ஆகவே பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

$$l\frac{\delta F}{\delta x_1} + m\frac{\delta F}{\delta y_1} + n\frac{\delta F}{\delta z_1} = 0 \quad\text{——}\quad (2)$$

$$F(x_1, y_1, z_1)=0 \text{——}(3)$$

P இல் மேற்பரப்பைத் தொடும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் திசைத் தகவுகளும் தொடர்பு (2) இன்படி இணைக்கப்படுகின்றன. ஆகவே நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகளுக்கும் தொடர்பு (2) க்கு மிடையே (l, m, n) ஆகியவற்றை நீக்க, இக்கோடுகள் அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது. இத்தளமே P இல் கூம்பு வளையவுருவிற்குரிய தொடுதளமாகும்.

அதாவது $$(x-x_1)\frac{\delta F}{\delta x_1} + (y-y_1)\frac{\delta F}{\delta y_1} + (z-z_1)\frac{\delta F}{\delta z_1} = 0 \quad\text{——}(4)$$

சமன்பாடு (4) ஐ விரித்தெழுதி, தொடர்பு (3) ஐப் பயன் படுத்திச் சுருக்க, தொடுதளத்தின் சமன்பாடு பின்வருமாறு அமை கின்றது.

$$x(ax_1+hy_1+gz_1+u) + y(hx_1+by_1+fz_1+v) + z(gx_1+fy_1+cz_1+w)+(ux_1+vy_1+wz_1+d)=0.$$

$F(x_1, y_1, z_1, t) \equiv ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2fy_1z_1+2gz_1x_1+2hx_1y_1+2ux_1t+2vy_1t+2wz_1t+dt^2$ எனில்,

தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைப் பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

$$x \frac{\delta F}{\delta x_1} + y \frac{\delta F}{\delta y_1} + z \frac{\delta F}{\delta z_1} + \frac{\delta F}{\delta t} = 0$$

(இங்கே பகுதி வகைக்கெழுக்களில் $t = 1$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.)

7·4. கொடுத்த புள்ளியில் மேற்பரப்பின் செங்கோடு

புள்ளி $P (x_1, y_1, z_1)$ இல் கூம்பு வளையவுருவின் தொடுதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடே அப் புள்ளியில் மேற்பரப்பின் செங்கோடாகும்.

இக்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் $\left(\frac{\delta F}{\delta x_1}, \frac{\delta F}{\delta y_1}, \frac{\delta F}{\delta z_1}\right)$ ஆவன.

செங்கோடு, P இன் வழியாகச் செல்லுவதால், அதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\frac{\delta F}{\delta x_1}} = \frac{y-y_1}{\frac{\delta F}{\delta y_1}} = \frac{z-z_1}{\frac{\delta F}{\delta z_1}} \text{ என்றாகும்.}$$

7·5. கொடுத்த தளம் இருபடி மேற்பரப்பைத் தொடுதற்குரிய நிபந்தனையைக் காணல்

கொடுக்கப்பட்ட தளம்

$lx+mx+nz+p=0$ என்க. ———— (i)

புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இல் கூம்பு வளையவுருவின் தொடுதளம்

$$x(ax_1+hy_1+gz_1+u)+y(hx_1+by_1+fz_1+v)+z(gx_1+fy_1+cz_1+w)+(ux_1+vy_1+wz_1+d)=0 \quad \text{——(ii)}$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிக்கின்றபடியால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\therefore \frac{ax_1+hy_1+gz_1+u}{l} = \frac{hx_1+by_1+fz_1+v}{m} = \frac{gx_1+fy_1+cz_1+w}{n}$$

$$= \frac{ux_1+vy_1+wz_1+d}{p} = k \text{ (என்க)}$$

இவற்றிலிருந்து,

$$ax_1+hy_1+gz_1+u-kl=0$$
$$hx_1+by_1+fz_1+v-km=0$$
$$gx_1+fy_1+cz_1+w-kn=0$$
$$ux_1+vy_1+wz_1+d-kp=0$$

புள்ளி (x_1, y_1, z_1) கொடுக்கப்பட்ட தளத்தில் அமைவதால்,

$$lx_1+my_1+nz_1+p=0$$

இவ்வைந்து தொடர்புகளினின்றும் x_1, y_1, z_1, k ஆகியவற்றை நீக்க, தேவையான நிபந்தனை பெறப்படுகின்றது.

ஆகவே நீக்கற்பலன் $\begin{vmatrix} a & h & g & u & l \\ h & b & f & v & m \\ g & f & c & w & n \\ u & v & w & d & p \\ l & m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0$ ஆகும்.

7·6. மைய இருபடி மேற்பரப்புகள் (central Quadrics)

ஆய அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் ஆதியை ஒரு வசதியான புள்ளிக்கு மாற்றுவதினுல், இருபடிப் பொதுச் சமன்பாட்டில் x, y, z என்பவையின் கெழுக்களைப் பூச்சியமாக்கிச் சமன்பாட்டைப் பின்வரும் வடிவத்தில் பெறலாம்.

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+d'=0$$

இம் மேற்பரப்பில் புள்ளி $P\ (x, y, z)$ க்கு ஒத்ததாக $Q\ (-x, -y, -z)$ என்னும் மற்றெரு புள்ளி இதன்மேல் அமைவதை அறியலாம். ஆகவே PQ, ஆதியில் இருசமக் கூறிடப்படுகின்றது. ஆதி வழியாகச் செல்லும் மேற்பரப்பின் நாண்கள் அனைத்திற்கும் ஆதி நடுப்புள்ளியாக அமையும்.

ஆகவே புது ஆதியைப் பொருத்து மேற்பரப்பு சமச்சீராக அமைகின்றது. இப் புள்ளி மேற்பரப்பின் மையமென அழைக்கப்படுகின்றது. மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் மேற்பரப்பின் விட்டம் எனப்படும். இக் காரணம் பற்றியே, இவ்வகை மேற்பரப்புகள் மைய இருபடி மேற்பரப்புகள் அல்லது மையக் கூம்பு வளையவுருக்கள் எனக் கூறப்படுகின்றன.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டில் yz, zx, xy ஆகியவற்றைக் கொண்ட உறுப்புகள் மறையும்படியாக ஆய அச்சுகளை வசதியாகச் சுழற்றினால், சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தை அடைகின்றது.

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

இச் சமன்பாட்டினைக் கொண்ட மேற்பரப்பின் தன்மைகளைப் பற்றி ஆராய்வோம். $P(x, y, z)$ என்ற புள்ளி மேற்பரப்பில் அமையுமெனில், $P'(x, y, -z)$ எனும் புள்ளியும் இதன்மேல் அமையும். ஆகவே YOZ தளத்தால் PP' இருசமக் கூறிடப்படுகிறது. அதாவது, YOZ தளத்தைப் பொருத்து கூம்பு வளையவுரு சமச்சீராக அமைகின்றது. இதேபோல் இம் மேற்பரப்பு மற்ற இரு ஆயத்தளங்களைப் பொருந்தும் சமச்சீராக அமைவதை உணரலாம். சமச்சீரைத் தரும் இம் மூன்று தளங்களும் தலையாய தளங்கள் (principal planes) எனவும், ஆய அச்சுகள் தலையாய அச்சுகள் எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

7·7. மையக் கூம்பு வளையவுருக்களின் வகைகளைப் பற்றி ஆராய்தல்

மைய இருபடி மேற்பரப்பின் சமன்பாடு பின்வரும் சுருக்கிய வடிவத்தில் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1$$

இச் சமன்பாட்டில் மூன்று கெழுக்களும் எதிராக (negative) அமைய முடியாது. அப்படி இருக்குமெனில், மாறிகளின் மதிப்புக்கள் கற்பனையானவையாகவும், அதன் காரணமாக மேற்பரப்பில் அமையும் புள்ளிகள் கற்பனையானவையாகவும் அமைகின்றன. ஆகவே குறியைப் பொருத்தவரை பின்வரும் மூன்று வெவ்வேறு ஒழுங்குகளே பொருத்தமுடையனவாகும்.

(i) A, B, C ஆகிய மூன்றும் நேராக (Positive) இருத்தல்.

(ii) இருமாறிலிகள் நேராகவும் மற்றது எதிராகவும் இருத்தல்.

(iii) ஒரு மாறிலி நேராகவும் மற்றவை எதிராகவும் இருத்தல்.

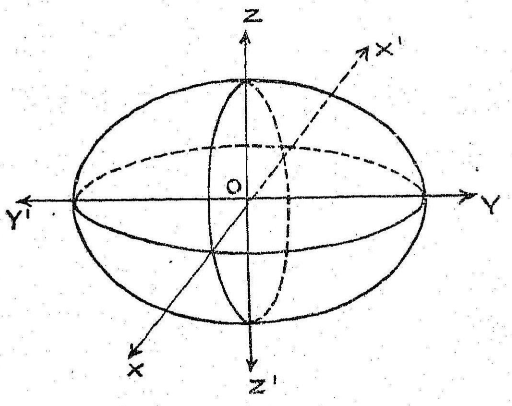
7·8. நீள்வளையவுரு (Ellipsoid)

A, B, C யாவும் நேராக இருப்பின், $A=\dfrac{1}{a^2}$, $B=\dfrac{1}{b^2}$, $C=\dfrac{1}{c^2}$ எனப் பிரதியிடுக. (a, b, c யாவும் நேரானவை)

சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்றாகிறது.

இந்த மேற்பரப்பு ஆய அச்சுகளை $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ ஆகிய புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

x, y, z என்பவையின் பெறுமானங்கள் (numerical values) முறையே a, b, c என்பவைகளைவிட அதிகமாக இருக்கமுடியாதென்பதை எளிதாக அறியலாம்.



படம் 51

இம் மேற்பரப்பில் ஆயத் தளங்களால் ஏற்படும் வெட்டு முகங்கள் யாவும் நீள்வளையங்கள் (ellipses) ஆக உள்ளன.

தளம் $z=k$ $(-c \leq k \leq c)$ என்பதால் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் பின்வரும் நீள் வளையமாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}; \; z=k.$$

இதன் நெட்டச்சு (major axis), குற்றச்சு (minor axis) ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே $2a\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$, $2b\sqrt{\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}$ ஆகும்.

பூச்சியத்திலிருந்து c க்கோ அல்லது பூச்சியத்திலிருந்து $-c$ க்கோ k மாறும்போது, இவ்வச்சுகளின் நீளங்கள் $2a$, $2b$ ஆகியவற்றிலிருந்து பூச்சியத்திற்கு மாறுபடுகின்றன.

இது ஓர் அடைத்த மேற்பரப்பு (closed surface) என்பது புலனாகின்றது. இதுவே நீள் வளையவுருவென அழைக்கப்படு

கிறது. குறிப்பாக $a=b=c$ என அமைந்தால், இது ஒரு கோள மாகின்றது. இம் மேற்பரப்பில் ஆயத்தளங்கள் $x=0$, $y=0$, $z=0$ ஆகியவற்றால் உண்டாகும் வெட்டுமுகங்கள் யாவும் நீள்வளை யங்களாக இருக்கும் காரணம் பற்றியே இது நீள்வளையவுருவெனப் பெயர் பெறுகின்றது.

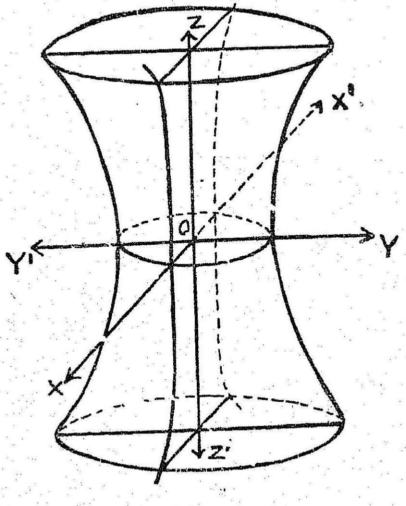
7·9. ஒரு மடி அதிபரவளைவுரு (Hyperboloid of one sheet)

A, B ஆகியவற்றை நேராகவும், C ஐ எதிராகவும் கொள்க. $A=\frac{1}{a^2}$, $B=\frac{1}{b^2}$, $C=-\frac{1}{c^2}$ எனப் பிரதியிடுக (a, b, c யாவும் நேரானவை)

ஆகவே சமன்பாடு பின்வருமாறு அமைகிறது.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

இம்மேற்பரப்பு X, Y அச்சுகளை $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. Z அச்சைக் கற்பனையான புள்ளி



படம் 52

களில் சந்திக்கிறது. ஒவ்வோர் ஆய தளத்தைப் பொருத்தும் இது சமச்சீராக அமைந்துள்ளது.

இம் மேற்பரப்பில் YOZ, ZOX தளங்களால் ஏற்படும் வெட்டு முகங்களும் அதிபரவளைவுகளாகும் (**hyperbolas**). XOZ தளத்தால் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் நீள் வளையமாகும்.

தளம் $z=k$ ஆல் ஏற்படும் வெட்டு முகம்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \; ; \; z=k$$ என்ற நீள் வளையமாகும்.

k இன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க, வெட்டுமுகம் பெரிதாகிக் கொண்டு போகின்றது. ஆகவே k இன் பெறுமானம் முடிவிலியை அணுகும்போது, இம் மேற்பரப்பு XOY தளத்திற்கு இருபுறமும் முடிவிலாது நீண்டுகொண்டு போகும்.

$a=b$ எனில், XOY தளத்திற்கு இணையான தளத்தினுல் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் ஒரு வட்டமாகும். இவ் வகையில் மேற்பரப்பானது அதிபரவளைவு $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $x=0$ ஐ Z அச்சைச் சுற்றிச் சுழற்றினுல் கிடைப்பதாகும். இம் மேற்பரப்பில் தளங்கள் $x=0$, $y=0$ ஆல் உண்டாகும் வெட்டு முகங்கள் அதிபரவளைவுகளாகவும், $z=0$ தளத்தால் ஏற்படும் வெட்டு முகம் நீள் வளையமாகவும் இருப்பதால், இது ஒருமடி அதிபரவளைவுரு எனப் பெயர் பெறுகின்றது.

7·10. இருமடி அதிபரவளைவுரு (Hyperboloid of two sheets)

A ஐ நேராகவும், B, C என்பவைகளை எதிராகவும் கொள்க.

$$A=\frac{1}{a^2}, \; B= -\frac{1}{b^2}, \; C= -\frac{1}{c^2}$$ எனப் பிரதியிடுக.

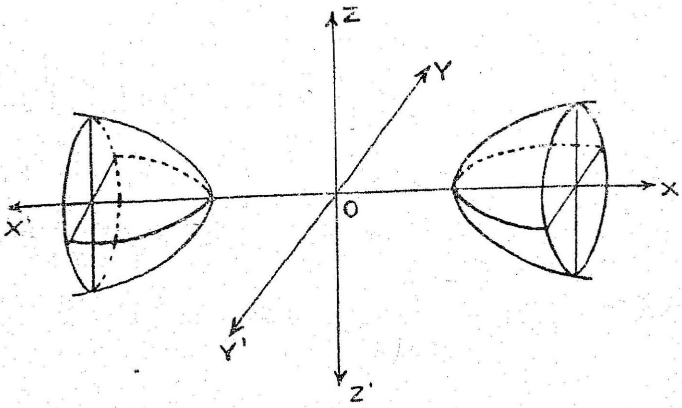
சமன்பாடு பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

இம் மேற்பரப்பு X அச்சை $(\pm a, 0, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது; Y, Z அச்சுகளைக் கற்பனையான புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. இது ஒவ்வோர் ஆயத் தளத்தைப் பொருத்தும் சமச்சீராக அமைந்துள்ளது.

ZOX, XOY தளங்களால் இம் மேற்பரப்பில் உண்டாகும் வெட்டு முகங்கள் அதிபரவளைவுகளாகும். YOZ தளத்தின் வெட்டு முகம் கற்பனையானது. k இன் பெறுமானம் a ஐ விட அதிகமாக

இராவிட்டால், தளம் $x=k$ இன் வெட்டுமுகம் மெய்யாக அமையாது.



படம் 53

$k^2 > a^2$ எனில், தளம் $x=k$ ஆல் மேற்பரப்பில் உண்டாகும் வெட்டு முகங்கள் நீள் வளையங்களாகும். அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \; ; \; x=k$$

k இன் பெறுமானம் அதிகரிக்க அதிகரிக்க வெட்டு முகம் பெரிதாகிக் கொண்டு போகின்றது. ஆகவே இம்மேற்பரப்பில் தனித்தனியே இருபகுதிகள் இருப்பதை உணரலாம்.

$b=c$ எனில், YOZ தளத்திற்கு இணையான தளத்தினல் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் ஒரு வட்டமாகும். ஆகவே, இவ்வகையில் இந்த மேற்பரப்பு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $z=0$ என்ற அதிபரவளைவை X அச்சைச் சுற்றிச் சுழற்றினல் கிடைப்பதாகும். இம் மேற்பரப்பை $x=0$ தளம் சந்திக்காமலும், தளங்கள் $y=0$, $z=0$ இதில் உண்டாக்கும் வெட்டு முகங்கள் அதிபர வளைவுகளாகவும் இருப்பதால், இது இருமடி அதிபரவளைவுருவென அழைக்கப்படுகின்றது.

7·11. ஒரு புள்ளியில் இருபடி மேற்பரப்பிற்குரிய தொடுதளமும் செங்கோடும்

மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டை $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ எனக் கொள்க. நேர்க்கோடு $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ இதை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது என்பதறிவோம்.

இக்கோட்டின் மேலமைந்த பொதுவான புள்ளியின் ஆய எண்கள் $(x_1+\lambda l,\ y_1+\lambda m,\ z_1+\lambda n)$ ஆவன.

இப்புள்ளி மேற்பரப்பில் அமைந்தால்,

$$A(x_1+\lambda l)^2+B(y_1+\lambda m)^2+C(z_1+\lambda n)^2=1$$

இதிலிருந்து பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Cnz_1)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)=0 \text{———} (1)$$

இதன் மூலங்கள் λ_1, λ_2 என்றால், நேர்க்கோடு கூம்பு வளைய வுருவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆய எண்கள் $(x_1+\lambda_1 l,\ y_1+\lambda_1 m,\ z_1+\lambda_1 n)$, $(x_1+\lambda_2 l,\ y_1+\lambda_2 m,\ z_1+\lambda_2 n)$ ஆவன.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடு, புள்ளி $P(x_1, y_1, z_1)$ இல் மேற்பரப்பைத் தொடுமெனில், இரு சந்திக்கும் புள்ளிகளும் P யோடு ஒன்றுபடும். ஆகவே சமன்பாடு (1) இன் இரு மூலங்களும் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad Alx_1+Bmy_1+Cnz_1=0 \text{———} (2)$$

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1=0 \text{———} (3)$$

ஒரு நேர்க்கோடு இந்த மேற்பரப்பை P இல் தொட்டால், அதன் திசைத் தகவுகள் தொடர்பு (2) ஆல் இணைக்கப்படுகின்றன. அத்தகைய கோடு P இல் மேற்பரப்பின் தொடுகோடாகும். இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்ட எல்லாக் கோடுகளும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. இத்தளமே P இல் மேற்பரப்பிற்குரிய தொடுதளமாகும்.

P இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண, நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள், தொடர்பு (2) ஆகியவற்றிற்கிடையே கோட்டின் திசைத் தகவுகளான (l, m, n) ஐ நீக்க வேண்டும்.

ஆகவே தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$A(x-x_1)x_1+B(y-y_1)y_1+C(z-z_1)z_1=0 \text{ என்பதே.}$$

அதாவது $\quad Axx_1+Byy_1+Czz_1=Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2$

முடிவு (3) ஐப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு பின்வருமாறு அமைகிறது. $\quad Axx_1+Byy_1+Czz_1=1$

$T \equiv Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 - 1$ என்றால், சமன்பாட்டை $T=0$ என எழுதலாம்.

முடிவு (2) இன்படி, திசைத் தகவுகள் (Ax_1, By_1, Cz_1) ஐக் கொண்ட நேர்க்கோடு தொடுதளத்தில் அமையும் ஒவ்வொரு நேர்க்கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக அமையுமென அறியலாம். ஆகவே இக்கோடு P இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளத்திற்குச் செங்கோடாகும். இதுவே P இல் மேற்பரப்பின் செங்கோடென அழைக்கப்படும்.

இதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{Ax_1} = \frac{y-y_1}{By_1} = \frac{z-z_1}{Cz_1} \text{ ஆகும்.}$$

7·12. கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கையை அறிதல்

கொடுத்த புள்ளியை $H\,(f, g, h)$ என்க.

புள்ளி $P\,(x_1, y_1, z_1)$ இல் மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் செங்கோடு

$$\frac{x-x_1}{Ax_1} = \frac{y-y_1}{By_1} = \frac{z-z_1}{Cz_1} \text{ ஆகும்.}$$

இக் கோடு $H\,(f, g, h)$ வழியாகச் செல்லுமெனில்,

$$\frac{f-x_1}{Ax_1} = \frac{g-y_1}{By_1} = \frac{h-z_1}{Cz_1}$$

இவற்றுள் ஒவ்வொரு பின்னமும் λ வுக்குச் சமமென எடுத்துக் கொண்டால், P இன் ஆய எண்கள் $\left(\frac{f}{\lambda A+1}, \frac{g}{\lambda B+1}, \frac{h}{\lambda C+1}\right)$ என்பனவாகும்.

P கொடுத்த கூம்பு வளையவுருவின்மேல் அமைவதால்,

$$\frac{Af^2}{(\lambda A+1)^2} + \frac{Bg^2}{(\lambda B+1)^2} + \frac{Ch^2}{(\lambda C+1)^2} = 1$$

இது λ இல் ஓர் ஆறுபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், λ இன் ஆறு மதிப்புகளுக்கு ஒத்தவாறு ஆறு புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன. இவற்றுள் மேற்பரப்பிற்குரிய செங்கோடுகள் H வழியாகச் செல்லுகின்றனவென அறிகிறோம். அதாவது கொடுத்த புள்ளியிலிருந்து, மையக் கூம்பு வளையவுருவிற்கு ஆறு செங்கோடுகள் வரைய முடியுமென்று அறியலாம்.

7·13. கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மைய இருபடி மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் ஆறு செங்கோடுகளின் அடிகளும் ஒரு முப்படி வளைவரையில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ எனவும், கொடுத்த புள்ளி $H(f, g, h)$ எனவும் கொள்க. H இலிருந்து வரையப்படும் ஆறு செங்கோடுகளின் அடிகளில் ஒன்றை $P \ (x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்க. செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளிலிருந்து P இன் ஆய எண்கள் பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றன.

$$\left(\frac{f}{\lambda A+1}, \frac{g}{\lambda B+1}, \frac{h}{\lambda C+1}\right)$$

அதாவது, $x_1 = \dfrac{f}{\lambda A+1}$; $y_1 = \dfrac{g}{\lambda B+1}$; $z_1 = \dfrac{h}{\lambda C+1}$

ஆகவே பின்வரும் துணையலகுச் சமன்பாடுகளையுடைய வளைவரையில் P அமைகின்றது.

$$x = \frac{f}{\lambda A+1}, \quad y = \frac{g}{\lambda B+1}, \quad z = \frac{h}{\lambda C+1}$$

$ax+by+cz+d=0$ என்ற ஏதாகிலும் ஒரு தளத்தை இவ்வளைவரை சந்திக்கும் புள்ளிகள் பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றன.

$$\frac{af}{\lambda A+1} + \frac{bg}{\lambda B+1} + \frac{ch}{\lambda C+1} + d = 0$$

இது λ இல் ஒரு முப்படிச் சமன்பாடு. λ விற்கு மூன்று மதிப்புகள் உள. எனவே இந்த வளைவரை தளத்தை மூன்று புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. இவ்விதமாக இது ஒரு முப்படி வளைவரையென்று அறியலாம். இது H இலிருந்து மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் அடிகள் வழியாகச் செல்லுகிறது. இதை வேறுவிதமாகக் கூறினல், ஆறு செங்கோட்டடிகளும் இம் முப்படி வளைவரை மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளாகும்.

7·14. தொடுகைக்குரிய நிபந்தனை

தளம் $lx+my+nz+p=0$, மேற்பரப்பை $P\,(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடுவதாகுக.

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ என்றால், P இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளம்

$Axx_1+Byy_1+Czz_1-1=0$ என்பதே.

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பவையாதலால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\therefore \frac{Ax_1}{l} = \frac{By_1}{m} = \frac{Cz_1}{n} = \frac{-1}{p}$$

அதாவது P இன் ஆய எண்கள் $\left(\frac{-l}{Ap}, \frac{-m}{Bp}, \frac{-n}{Cp}\right)$ ஆவன.

இப் புள்ளி கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பில் அமைவதால்,

$$A\left(\frac{-l}{Ap}\right)^2 + B\left(\frac{-m}{Bp}\right)^2 + C\left(\frac{-n}{Cp}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{l^2}{A} + \frac{m^2}{B} + \frac{n^2}{C} = p^2$$

இதுவே தொடுகைக்குரிய தேவையான நிபந்தனையாகும்.

7·15. குத்துத் தொடுதளக் கோளம் (Director Sphere)

ஒரு மையக் கூம்பு வளையவுருவிற்கு வரையப்படும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தொடுதளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காணல்.

கேள்வியில் உள்ள புள்ளியை $P(x_1, y_1, z_1)$ என்க.

மூன்று தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள்

$$l_r\, x + m_r\, y + n_r\, z = \pm\sqrt{\frac{l_r^2}{A} + \frac{m_r^2}{B} + \frac{n_r^2}{C}} \quad (r = 1, 2, 3)$$

P இத்தளங்களின்மேல் அமைவதால்

$$l_1x_1 + m_1y_1 + n_1z_1 = \pm\sqrt{\frac{l_1^2}{A} + \frac{m_1^2}{B} + \frac{n_1^2}{C}} \quad \text{—— (i)}$$

$$l_2x_1 + m_2y_1 + n_2z_1 = \pm\sqrt{\frac{l_2^2}{A} + \frac{m_2^2}{B} + \frac{n_2^2}{C}} \quad \text{—— (ii)}$$

$$l_3x_1 + m_3y_1 + n_3z_1 = \pm\sqrt{\frac{l_3^2}{A} + \frac{m_3^2}{B} + \frac{n_3^2}{C}} \quad \text{—— (iii)}$$

இவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால், ஏதாவதொரு புள்ளியிலிருந்து இத் தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை, ஒன்றுக்கொன்று

செங்குத்தான மூன்று கோடுகளின் திசைக்கொசைன்களை இணைக்கும் தொடர்புகளின்படி,

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$$

$$m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3=n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3=l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3=0$$

ஆகவே, தொடர்புகள் (i), (ii), (iii) ஆகியவற்றை வர்க்கப் படுத்திக் கூட்டினல், $x_1^2+y_1^2+z_1^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$ என்றாகும்.

எனவே P இன் இயங்குவரை $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}$ என்ற கோளமே.

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட கூம்பு வளையவுருவின் குத்துத் தொடுதளக் கோளமென அழைக்கப்படும். கொடுத்த மேற் பரப்பின் மையமும் இக் கோளத்தின் மையமும் ஒரே புள்ளியில் அமைந்திருப்பதை நாம் அறிகிறோம்.

7·16. கொடுத்த மையத்தையுடைய வெட்டுமுகம்

திசைத்தகவுகள் (l, m, n) உடைய PQ கூம்பு வளையவுருவின் நாணுகவும் $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ அதன் நடுப்புள்ளியாகவும் கொள்க. பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து P, Q ஆகியவற்றின் ஆய எண்கள் கணிக்கப்படுகின்றன என்பதை அறிவோம்.

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Cnz_1)\lambda+$$
$$(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1-1)=0$$

PQ இன் நடுப்புள்ளியாக M இருப்பதால், λ இன் மதிப்புக்கள் அளவில் சமமாகவும் எதிரான குறிகளை உடையனவாகவும் அமைகின்றன. ஆகவே இச் சமன்பாட்டு மூலங்களின் கூடுதல் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது,

$$Alx_1+Bmy_1+Cnz_1=0$$

இதிலிருந்து PQ திசை (Ax_1, By_1, Cz_1) க்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் என்பது புலனுகிறது. PQ ஐப் போன்று M ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட எல்லா நாண்களும் பின்வரும் தளத்தில் அமைகின்றன.

$$Ax_1(x-x_1)+By_1(y-y_1)+Cz_1(z-z_1)=0$$

i.e., $Axx_1+Byy_1+Czz_1=Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2$

வழக்கமான குறியீடுகளின்படி, இச்சமன்பாட்டை $T=S_1$ என எழுதலாம்.

மேற்பரப்பில் இத்தளத்தால் ஏற்படும் வெட்டுமுகம் ஒரு கூம்பு வளைவரையாகும்.

இவ்வெட்டுமுகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு நாணும் M இல் இரு சமக் கூறிடப்படுவதால், M இக்கூம்பு வளைவரையின் மையமாகும்.

7·17. இணை நாண்களின் கணத்தை இரு சமக்கூறிடும் தளம்

மேற்பரப்பின் விட்டம் $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ க்கு இணையான நாண்களில் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி $M(x_1, y_1, z_1)$ என்க.

முந்தைய உட்பிரிவின்படி, பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கின்றது.

$$Alx_1+Bmy_1+Cnz_1=0$$

நாண்கள் யாவும் இணையாக அமைவதால், (l, m, n) ஆகியவை மாருக் கணியங்களாகும்.

ஆகவே M இன் இயங்குவரை,

$$Alx+Bmy+Cnz=0$$ என்பதாகும்.

இது கூம்பு வளையவுருவின் மையத்தின் வழியே செல்லும் தளமாகும். கொடுக்கப்பட்ட விட்டத்திற்கு இத்தளம் துணையிய விட்ட தளம் (conjugate diametral plane) என அழைக்கப்படும்.

7·18. சுற்றிவரையப்பட்ட உருளை (circumscribing cylinder)

$P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து இருபடி மேற்பரப்பைச் சந்திக்குமாறு வரையப்படும் கோடு $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ என்ருல், அது மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் ஆய எண்கள் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாட்டால் தரப்படுகின்றன என்பதை அறிவோம்.

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Cnz_1)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)=0$$

இந் நேர்க்கோடு மேற்பரப்பைத் தொடுமெனில், சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் சமமாகும்.

$$\text{ஆகவே } (Alx_1+Bmy_1+Cnz_1)^2-(Al^2+Bm^2+Cn^2)(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)=0$$

திசை (l, m, n) இல் மேற்பரப்பிற்கு எண்ணிலாத் தொடுகோடுகள் வரையப்படும். அவற்றுள் ஒன்று $P(x_1, y_1, z_1)$ வழியே செல்லுமாதலால், இத்தொடுகோடுகளின் இயங்குவரை பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுகிறது.

$$(Alx+Bmy+Cnz)^2=(Al^2+Bm^2+Cn^2)(Ax^2+By^2+Cz^2-1)$$

இதுவே கொடுத்த இருபடி மேற்பரப்பிற்கு வரையப்பட்ட உருளையாகும்.

7·19. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை ஓர் இருபடி மேற்பரப்பு பிரிக்கும் விகிதங்களை அறிதல்

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ கொடுத்த புள்ளிகள் எனக் கொள்க.

PQ ஐ $k:1$ என்ற விகிதத்தில் R பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். R இன் ஆய எண்கள் $\left(\dfrac{x_1+kx_2}{1+k}, \dfrac{y_1+ky_2}{1+k}, \dfrac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ ஆவன.

இப்புள்ளி மேற்பரப்பில் அமையுமெனில்,

$$A\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)^2+B\left(\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)^2+C\left(\frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)^2=1$$

இதிலிருந்து k இல் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$k^2(Ax_2^2+By_2^2+Cz_2^2-1)+2k(Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2-1)+(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)=0 \quad \text{———} (1)$$

PQ மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள், அதைப் பிரிக்கும் விகிதங்களே இச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும். இச்சமன்பாட்டிலிருந்து பல முக்கியமான முடிவுகள் பெறப்படுகின்றன.

துணை முடிவு

இக்கோடு P இல் கூம்பு வளையவுருவைத் தொடுமெனில், இரு வெட்டும் புள்ளிகளும் P யோடு ஒன்றுபடும். ஆகவே சமன்பாடு (1) இன் இரு மூலங்களும் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2-1=0 \text{———} (2)$$

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1=0 \text{———} (3)$$

முடிவு (3), மேற்பரப்பில் P அமைவதைக் காட்டுகின்றது.

முடிவு (2) இலிருந்து Q இன் இயங்குவரை $Ax_1x+By_1y+Cz_1z-1=0$ ஆகும்.

இதுவே P இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளமாகும். இந்தச் சமன்பாட்டை வேறுவழியில் ஏற்கெனவே அடைந்துள்ளோம்.

7·20. கொடுத்த ஒருபுள்ளியின் இசைத்தளம் காணல்

$P(x_1, y_1, z_1)$ நிலைத்த புள்ளியாகக் கொள்க. PQ மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகளும் PQ ஐப் பொருந்து இசைத் துணையிகளாக இருக்கும்படி $Q(x_2, y_2, z_2)$ இன் நிலை மாறுவதாகக் கொள்க.

ஆகவே உட்பிரிவு 7·18 இல் உள்ள சமன்பாடு (1) இன் மூலங்கள் அளவில் சமமாகவும் எதிரான குறிகளையுடையவனவாகவும் அமையும்.

$\therefore$ மூலங்களின் கூடுதல் $= 0$

அதாவது $Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2-1=0$

Q இன் இயங்குவரை $Ax_1x+By_1y+Cz_1z=0$ என்பதே.

இது ஒருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால், ஒரு தளத்தைக் குறிக்கின்றது.

இத்தளமே கூம்பு வளையவுருவைப் பொருத்து P இன் இசைத் தளமெனப்படும். P இத்தளத்தின் இசைப்புள்ளி என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு: (i) P மேற்பரப்பில் அமைந்தால் அதன் இசைத் தளம் அப்புள்ளியில் மேற்பரப்பின் தொடுதளமேயாகும். ஆகவே தொடுதளமானது தொடுபுள்ளியின் இசைத்தளமாகக் கருதப்படும்.

(ii) $Q(x_2, y_2, z_2)$ ஆனது P இன் இசைத்தளத்தில் அமையுமெனில், $Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2 = 1$ என்றாகும்.

இதுவே P ஆனது Q இன் இசைத்தளத்தில் அமைய நிபந்தனையாகும். இவ்விரு புள்ளிகளும் கூம்பு வளையவுருவைப்

பொருத்து, துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points) என அழைக்கப்படும்.

(iii) π, π' என்ற தளங்களில் π இன் இசைப் புள்ளி π' இல் அமையுமென்றால், π' இன் இசைப்புள்ளி π இன் மேல் அமையுமென்பதை அறியலாம். இவ்விரு தளங்களும் மேற்பரப்பைப் பொருத்து, துணையியத் தளங்கள் (conjugate planes) எனப்படும்.

7·21. கொடுத்த ஒரு தளத்தின் இசைப் புள்ளியை அறிதல்

தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz+p=0$ எனவும், அதன் இசைப்புள்ளி $P\ (x_1, y_1, z_1)$ எனவுங் கொள்க.

கொடுத்த இருபடி மேற்பரப்பைப் பொருத்து P இன் இசைத் தளம் $Axx_1+Byy_1+Czz_1-1=0$ ஆகும்.

இவ்விரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\text{ஆகவே}\quad \frac{Ax_1}{l}+\frac{By_1}{m}+\frac{Cz_1}{n}=\frac{-1}{p}$$

இவற்றிலிருந்து இசைப் புள்ளியின் ஆய எண்கள்

$$\left(\frac{-l}{Ap}, \frac{-m}{Bp}, \frac{-n}{Cp}\right) \text{ எனப் பெறப்படும்.}$$

7·22. இசைக்கோடுகள் (Polar lines)

கொடுத்த நேர்க்கோடு L எனவும், அதன் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \text{ எனவுங் கொள்க.}$$

L இன் மேல் அமைந்த பொதுவான புள்ளி P என்றால், அதன் ஆய எண்கள் $(x_1+l\lambda, y_1+m\lambda, z_1+n\lambda)$ ஆவன.

கொடுத்த இருபடி மேற்பரப்பைப் பொருத்து P இன் இசைத் தளம் $Ax(x_1+l\lambda)+By\ (y_1+m\lambda)+Cz\ (z_1+n\lambda)=1$ என்பதே.

அதாவது, $(Axx_1+Byy_1+Czz_1-1)+\lambda(Alx+Bmy+Cnz)=0$

துணையலகு λ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் P இன் இசைத் தளம் பின்வரும் நிலைத்த தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோட்டின் வழியே செல்லும்,

$$Axx_1+Byy_1+Czz_1-1=0$$
$$Alx+Bmy+Cnz=0$$

இந்தத் தளங்கள் சந்திக்கும் கோட்டை L' என்க.

நேர்க்கோடுகள் L, L' என்பவைகளில் முறையே புள்ளிகள் P, Q ஐ எடுத்துக் கொள்க. P இன் இசைத்தளத்தில் Q உம், அதேபோல் Q இன் இசைத்தளத்தில் P உம் அமைகின்றன. L இல் P ஏதாவதொரு புள்ளியாக இருப்பதால், Q இன் இசைத்தளம் L வழியே செல்லவேண்டும். L' இன் மேல் Q நகரும்படி செய்யப்பட்டால், அதன் இசைத்தளம் எப்போதும் L வழியே செல்லும்படி நகருகின்றது. இவ்விதமாக L, L' ஆகிய கோடுகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழானது (reciprocal) என அறிகிறோம். இவையிரண்டும் கூம்பு வளைய வுருவைப் பொருத்து இசைக்கோடுகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு : மேற்பரப்பைப் பொறுத்து l', m' என்பவை l, m என்ற நேர்க்கோடுகளின் இசைக் கோடுகளாக இருப்பதாகுக. l ஐ m' புள்ளி P இல் சந்திப்பதாகுக. m', l ஆகியவற்றின் மேல் P அமைவதால், அதன் இசைத்தளம் m', l கோடுகளின் இசைக் கோடுகளான m, l' வழிச் செல்கிறது. அதாவது கோடுகள் m, l' ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன. ஆகவே அவையிரண்டும் சந்திக்கின்றன.

இதிலிருந்து நாம் அறிவதானது, நேர்க்கோடு m இன் இசைக் கோட்டை, கோடு l சந்திக்குமேயெனில், l இன் இசைக்கோட்டை m சந்திக்கிறது. இப்படிப்பட்ட இருகோடுகள் துணையியக் கோடுகள் (Conjugate lines) எனப்படும்.

7·23. தொடு கூம்பு (Tangent cone)

ஓர் இருபடி மேற்பரப்பிற்கு, கொடுத்த புள்ளி P இலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகள் ஒரு கூம்பின் மேற்பரப்பில் அமைகின்றன. இதுவே P ஐ உச்சியாகக் கொண்ட தொடு கூம்பாகும்.

தொடுகோடுகளில் PQ ஒன்றெனில், அது மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒன்றுபடுகின்றன. ஆகவே 7·18 இல் உள்ள சமன்பாடு (1) இன் மூலங்கள் சமமானவை. இச் சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி (discriminant) பூச்சியமாகும்.

அதாவது, $(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1))Ax_2^2+By_2^2+Cz_2^2-1)=$
$(Ax_1x_2+By_1y_2+Cz_1z_2-1)^2$

இதிலிருந்து Q இன் இயங்குவரை
$(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)$ $(Ax^2+By^2+Cz^2-1)$ $=$ $(Axx_1+$
$Byy_1+Czz_1-1)^2$ என்பதே.

இதுவே தொடு கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

வழக்கமான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$SS_1=T^2$$

குறிப்பாக, மேற்பரப்பின் மையத்தை உச்சியாகக் கொண்ட தொடு கூம்பு, சமன்பாடு $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. x, y, z ஆகியவற்றின் மதிப்பு முடிவுள்ளவையாக இருப்பின், அவை இக் கூம்பின் சமன்பாட்டிலும், மேற்பரப்பின் சமன்பாட்டிலும் ஒருங்கே பொருந்த முடியாது. ஆகவே கூம்பு மேற்பரப்பைத் தொடும் புள்ளிகள் மையத்திலிருந்து முடிவுள்ள தூரத்தில் அமையமுடியாதென அறிகிறோம். மையத்திலிருந்து முடிவிலா தூரத்தில் மேற்பரப்பைத் தொடும் தொடுகோடுகளே இக் கூம்பின் பிறப்பாக்கிகளாவன. எனவே இக் கூம்பு அணுகு கோட்டுக் கூம்பு (asymptotic cone) என அழைக்கப்படுகிறது.

இக் கூம்பு மெய்யானதென்றால், A, B, C ஆகியவை ஒரே குறியினையுடையனவாக இருக்க முடியாது. ஆகவே மைய இருபடி மேற்பரப்புகளில், ஒருமடி, இருமடி அதிபரவளைவுருக்களுக்கு மட்டுமே மெய்யான அணுகு கோட்டுக் கூம்பு அமைய முடியும்.

7·24. துணையிய விட்டங்களும் விட்ட தளங்களும் (Conjugate diameters and diametral planes).

இப் பகுதியில் மேற்பரப்பைக் குறிப்பாக நீள் வளையவுருவாகக் கொள்வோம். O ஐ மையமாகக் கொள்க.

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ என்பதே.

இதன் விட்டமான $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$ இன் விட்ட தளம்

$\dfrac{lx}{a^2}+\dfrac{my}{b^2}+\dfrac{nz}{c^2}=0$ ஆகும்.

இவ்விட்டத்தின் ஒரு முனை (x', y', z') எனில், விட்ட தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0 \text{ என்றும் பெறப்படும்.}$$

இத்தளம் புள்ளி (x', y', z') இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளத்திற்கு இணையாக அமைவதை அறியலாம். ஆகவே ஒரு விட்டத்தின் விட்டதளம் அதன் இரு முனைகளில் மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் தொடு தளங்களுக்கு இணையாக அமையும்.

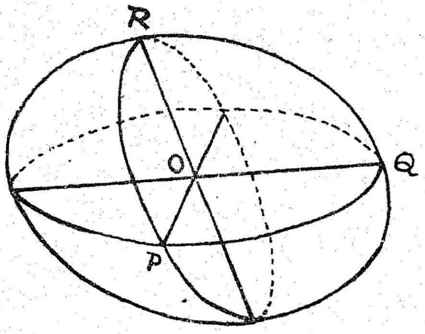
$P(x_1, y_1, z_1)$ நீள்வளையவுருவின் மேல் ஒரு புள்ளியென்றால், OP இன் விட்டதளம்

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 0 \text{ என்பதே.}$$

இத்தளம் நீள்வளையவுருவில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகத்தின் மேல் $Q(x_2, y_2, z_2)$ அமைவதாகக் கொள்க. OP இன் விட்ட தளம் Q இன் வழியாகச் செல்வதால்,

$$\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

சமச்சீரின் காரணமாக, OQ இன் விட்ட தளம் P இன் வழியாகச் செல்வதற்கும் இதுவே நிபந்தனையாகும்.



படம் 54

எனவே, OP இன் விட்ட தளம் Q இன் வழியாகச் செல்லுமெனில், OQ இன் விட்ட தளம் P இன் வழியாகச் செல்லுமென்பதை அறிகிறோம். OP, OQ ஆகியவற்றின் விட்ட தளங்கள்

வெட்டிக்கொள்ளும் கோடு கூம்பு வளையவுருவைச் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகளில் ஒன்றை R எனக் கொள்க.

OP, OQ இன் விட்ட தளங்கள் OR வழியாகச் செல்லுவதால், OR இன் விட்ட தளம் OP, OQ இன் வழியாகச் செல்லும். ஆகவே OR இன் விட்ட தளம் POQ ஆகும். அதாவது OP, OQ, OR ஆகிய மூன்று கோடுகளில் ஒவ்வொன்றின் விட்ட தளமும் மற்ற இரண்டின் வழியாகச் செல்லுமாறு அமைந்துள்ளன.

மூன்று தளங்களில் ஒவ்வொன்றும் மற்ற இரண்டு தளங்கள் வெட்டுங் கோட்டிற்கு விட்ட தளமாக இருப்பின், அவை துணையியத் தளங்கள் எனவும், மூன்று விட்டங்களில் ஒவ்வொன்றின் விட்ட தளமும் மற்ற இரண்டின் வழியாகச் செல்லுமெனில், அவை துணையிய விட்டங்கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

$P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ துணையிய விட்டங்களின் முனைகளெனில், பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_2x_3}{a^2}+\frac{y_2y_3}{b^2}+\frac{z_2z_3}{c^2}&=0\\ \frac{x_3x_1}{a^2}+\frac{y_3y_1}{b^2}+\frac{z_3z_1}{c^2}&=0\\ \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}&=0\end{aligned}\right\}\text{———(i)}$$

கொடுத்துள்ள புள்ளிகள் மேற்பரப்பில் அமைவதால்,

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}&=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}&=1\\ \frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}&=1\end{aligned}\right\}\text{———(ii)}$$

மேற்கண்ட தொடர்புகளிலிருந்து, $\left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \frac{z_1}{c}\right)$; $\left(\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}\right)$; $\left(\frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}\right)$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று நேர்க்கோடுகளின் திசைக்கொசைன்களாக எடுத்துக் கொள்ளப்படலாம்.

ஆகவே, பின்வரும் தொடர்புக் கணங்கள் கிடைக்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+x_3^2&=a^2\\ y_1^2+y_2^2+y_3^2&=b^2\\ z_1^2+z_2^2+z_3^2&=c^2\end{aligned}\right\}\text{——(iii)}\qquad \left.\begin{aligned} y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3&=0\\ z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3&=0\\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3&=0\end{aligned}\right\}\text{——(iv)}$$

7·25. துணையிய அரை விட்டங்களின் சில பண்புகள் (properties)

(i) $OP^2+OQ^2+OR^2=(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)+(x_3^2+y_3^2+z_3^2)$

$=a^2+b^2+c^2$

$=$ ஒரு மாறிலி

அதாவது, மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் ஒரு மாறிலியாகும்.

(ii) OP, OQ, OR ஆகியவற்றை ஒரு முனையில் சந்திக்கும் விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு

$= 6\times$ நான்முகி $OPQR$ இன் கன அளவு

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1y_1 & \Sigma x_1z_1\\ \Sigma x_1y_1 & \Sigma y_1^2 & \Sigma y_1z_1\\ \Sigma x_1z_1 & \Sigma y_1z_1 & \Sigma z_1^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{vmatrix}$$ (தொடர்புகள் (iii), (iv) ஐப் பயன்படுத்துக.)

$=a^2b^2c^2$

ஆகவே, துணையிய அரை விட்டங்களால் உருவாக்கப்படும் இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு $=\pm abc$

$=$ ஒரு மாறிலி.

அதாவது ஒரு நீள் வளையவுருவின் மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களை ஒருமுனை விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு மாருததாகும்.

வெவ்வேறு கணியங்களின் வடிவ கணிதப் பொருளை எடுத்துக் கொள்ளாமல், தொடர்புகள் (i), (ii) இலிருந்து தொடர்புகள் (iii), (iv) ஐ இயற்கணித முறைப்படி அடைய முடியுமாதலால், மேற்கண்ட முடிவுகள் அதிபரவளைவுருக்களுக்கும் பொருந்தும்.

7·26. பிறப்பாக்கிகள் (Generators)

நேர்க்கோடு $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ இருபடி மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் துணையலகுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டால் தரப்படுவதை அறிவோம் (உட்பிரிவு 7·11).

$$(Al^2+Bm^2+Cn^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Cnz_1)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2-1)=0 \text{———}(1)$$

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து λ வுக்கு இரு மதிப்புகள் மட்டுமே கிடைக்கும்.

ஆயினும், புள்ளி $P(x_1, y_1, z_1)$ மேற்பரப்பில் அமைந்து, (l, m, n) ஆகியவை,

$$Al^2+Bm^2+Cn^2=0 \text{———}(2)$$

$$Alx_1+Bmy_1+Cnz_1=0 \text{———}(3)$$

என்ற தொடர்புகளின்படி இணைக்கப்படுமேயாயின், சமன்பாடு (1) இல் λ இன் எல்லா மதிப்புகளும் பொருந்தும். அதாவது, நேர்க்கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் மேற்பரப்பில் அமையும். ஆகவே, கோடு முழுமையுமே மேற்பரப்பில் அமைவதாகும். இப்படிப்பட்ட கோட்டை மேற்பரப்பின் பிறப்பாக்கி அல்லது பிறப்பிக்குங்கோடு (generating line) எனக் கூறுகின்றோம். இக்கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் மேற்பரப்பே வரை பரப்பு (Ruled Surface) எனப்படும்.

தொடர்பு (3) இன்படி, (l, m, n) என்ற திசைத் தகவுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடு (Ax_1, By_1, Cz_1) என்ற திசைக்குச் செங்குத்தாக அமைகின்றதென அறியலாம். ஆகவே P இல் மேற்பரப்பிற்குரிய தொடுதளத்தில் பிறப்பாக்கி அமையும். இத்தொடுதளம் மேற்பரப்பில் ஏற்படுத்தும் வெட்டு முகம் ஒரு கூம்பு வளைவரை

யாகும். இவ் வளைவரையின் ஒரு பகுதி P வழியே செல்லும் பிறப்பாக்கியாதலால், வெட்டு முகம் இரு நேர்க்கோடுகள் அடங்கியதாக அமையவேண்டும். மற்றொரு நேர்க்கோடும் மேற்பரப்பின் பிறப்பாக்கியேயாகும். இவ்விதமாக மேற்பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியின் வழியாகவும் இரு பிறப்பாக்கிகள் செல்லுகின்றன (இவை மெய்யாகவோ அல்லது கற்பனையாகவோ அமையலாம்). தொடுதளத்தின் தொடு புள்ளியே இரு பிறப்பாக்கிகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியாகும். ஒரு கூம்பு வளையவுருவைத் தொடுதளம் சந்திக்கும் இரு பிறப்பிக்குங் கோடுகளும் ஒன்றுபடுமெனில், மேற்பரப்பு ஒரு கூம்பாகவோ அல்லது உருளையாகவோ அமையும். கூம்பு வளையவுருக்களில் எவையெவை வரைபரப்புக்கள் என்பதைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

ஒரு மேற்பரப்பில் குறிப்பிட்ட ஒரு புள்ளியில் அதன் தொடுதளம் உண்டாக்கும் வெட்டு முகத்தின் தன்மை கொண்டு, அம் மேற்பரப்பு வரைபரப்பா அல்லவா எனத் தீர்மானிக்க முடியும்.

கூம்பு வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$க்குப் புள்ளி$(a, 0, 0)$இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு $x=a$ ஆகும். இத்தளம் மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் கோடுகளுக்குத் தளம் $x=0$ இன் மேல் அமையும் குத்து வீழல்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு $\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$ ஆகும். மேற்பரப்பு ஒருமடி அதிபரவளைவுருவாயின், இக்கோடுகள் மெய்யானவையாகும். மேற்பரப்பு நீள்வளையவுருவாகவோ, இருமடி அதிபரவளைவுருவாகவோ இருப்பின், இக்கோடுகள் கற்பனையானவையாகும். ஆகவே; ஒருமடி அதிபரவளைவுருவே மைய இருபடி மேற்பரப்பைச் சேர்ந்த ஒரு வரைபரப்பாகும்.

7·27. ஒருமடி அதிபரவளைவுருவின் இரு தொகுதிகளைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகள்

மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்பதே.

இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

அதாவது,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

பின்வரும் சமன்பாடுகளில் பொருந்தும் எந்தப் புள்ளியும் மேற்பரப்பில் அமைகிறதென்பதைப் பார்க்கிறோம்.

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right);\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \quad \text{——} (1)$$

(λ யாதானுமொரு மாறிலி)

இந்தச் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் நேர்க்கோடு முழுமையும் மேற்பரப்பில் அமைவதால், இக்கோடு ஒரு பிறப்பாக்கியாகும்.

இதேபோல், பின்வரும் சமன்பாடுகளும் ஒரு பிறப்பாக்கியையே குறிக்கின்றன என்பதை எளிதாகக் காட்ட முடியும்.

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{y}{b}\right);\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b} \quad \text{——} (2)$$

(μ யாதானுமொரு மாறிலி)

λ, μ ஆகியவற்றிற்கு எல்லாப் பொருத்தமான மதிப்புக்களை எடுத்துக் கொள்ளும்போது, இரு தொகுதிகளைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகள் கிடைக்கின்றன. அவற்றை λ தொகுதி எனவும், μ தொகுதி எனவும் அழைக்கலாம்.

ஒரே தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு பிறப்பாக்கிகள் வெட்டிக் கொள்வதில்லை. இதன் காரணத்தைப் பின்வருமாறு அறியலாம்.

λ_1, λ_2 என்ற மதிப்புக்களுக்கொத்த பிறப்பாக்கிகள் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம். இக்கோடுகளின் பொதுப் புள்ளி (x_1, y_1, z_1) எனில், பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$\frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}=\lambda_1\left(1+\frac{y_1}{b}\right)=\lambda_2\left(1+\frac{y_1}{b}\right)$$

மேலும், $1-\frac{y_1}{b}=\lambda_1\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}\right)=\lambda_2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}\right)$

இவற்றிலிருந்து $1+\frac{y_1}{b}=0$, $1-\frac{y_1}{b}=0$ என்ற முரண்பாடான முடிவுகள் கிடைக்கின்றன. ஆகவே, λ தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு பிறப்பாக்கிகள் சந்திக்க முடியாது. இம் முடிவு μ தொகுதியைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகளுக்கும் பொருந்தும்.

ஆயினும், ஒவ்வொரு λ பிறப்பாக்கியும், ஒவ்வொரு μ பிறப்பாக்கியும் சந்திக்கின்றன என்பதைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

$P(x_1, y_1, z_1)$ இல் ஒவ்வொரு தொகுதியைச் சேர்ந்த இ பிறப்பாக்கிகள் சந்திப்பதாகக் கொள்வோம்.

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c} = \lambda\left(1 + \frac{y_1}{b}\right); \quad \lambda\left(\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c}\right) = \left(1 - \frac{y_1}{b}\right)$$

$$\frac{x_1}{a} - \frac{z_1}{c} = \mu\left(1 + \frac{y_1}{b}\right); \quad \mu\left(\frac{x_1}{a} + \frac{z_1}{c}\right) = 1 - \frac{y_1}{b}$$

இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{2x_1}{a} = (\lambda+\mu)\left(1+\frac{y_1}{b}\right) = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)\left(1-\frac{y_1}{b}\right)$$

என்றாகும். ஆகவே P இன் ஆய எண்கள் பின்வருமாறு உள்ளன.

$$x_1 = \frac{a(\lambda+\mu)}{1+\lambda\mu}; \quad y_1 = \frac{b(1-\lambda\mu)}{1+\lambda\mu}; \quad z_1 = \frac{c(\lambda-\mu)}{1+\lambda\mu}$$

இவ்விதமாக மேற்பரப்பின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் ஆய எண்கள் அதன் வழியாகச் செல்லும் இரு பிறப்பாக்கிகளின் துணையலகுகளில் தரப்பட்டுள்ளன.

அதிபரவளைவுருவின் தலையாய நீள் வளைய வெட்டு முகத்தில் (principal elliptic section), புள்ளி $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ ஐ எடுத்துக்கொண்டு, அதன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

இப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் ஒரு பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடு

$$\frac{x-a\cos\theta}{la} = \frac{y-b\sin\theta}{mb} = \frac{z}{nc} \text{ எனில்,}$$

புள்ளி $(a\cos\theta + alr,\ b\sin\theta + bmr,\ cnr)$ என்பது (துணையலகு r இன் மதிப்பு எப்படியாயினும்) மேற்பரப்பில் அமையும்.

ஆகவே, r இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும்

$$(\cos\theta + lr)^2 + (\sin\theta + mr)^2 - n^2r^2 = 1 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad l^2 + m^2 - n^2 = 0 = l\cos\theta + m\sin\theta$$

$l = \sin\theta,\ m = -\cos\theta$ என எடுத்துக் கொள்ளப்படுமெனில்,

$$n = \pm 1 \text{ என்றாகும்.}$$

அதாவது இப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் இரு பிறப்பாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-a\cos\theta}{a\sin\theta}=\frac{y-b\sin\theta}{-b\cos\theta}=\frac{z}{\pm c}$$ ஆவன.

மாதிரி 1: நீள் வளையவுரு $x^2+4y^2+9z^2=10$ க்கு வரையப்படும் தொடுதளங்கள் நேர்க்கோடு $3x+4y+9z=20$, $x=3z$ வழியாகச் செல்லுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

இத்தளங்களின் தொடுபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடுகளையும் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு $(3x+4y+9z-20)+k(x-3z)=0$ ஆகும்.

அதாவது $(3+k)x+4y+(9-3k)z-20=0$ ——— (i)

இத்தளம் நீள் வளையவுருவை $P\,(x_1, y_1, z_1)$ இல் தொடுவதாகக் கொள்வோம்.

P இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$xx_1+4yy_1+9zz_1=10 \text{ ——— (ii)}$$

சமன்பாடுகள் (i), (ii) ஆகியவை ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால் முழுதுமொத்தவையாகும்.

ஆகவே, $$\frac{x_1}{3+k}=\frac{4y_1}{4}=\frac{9z_1}{9-3k}=\frac{10}{20}$$

இவற்றிலிருந்து, $x_1=\frac{1}{2}(3+k)$; $y_1=\frac{1}{2}$; $z_1=\frac{1}{6}(3-k)$ ஆகும்.

P கொடுத்த நீள் வளையவுருவின்மேல் அமைவதால்,

$$\tfrac{1}{4}(3+k)^2+1+\tfrac{1}{4}(3-k)^2=10$$

i.e., $k^2=9$ (அ.) $k=\pm 3$

k இன் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (i) இல் பிரதியிட, தேவையான தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன,

அவை $3x+2y=10$; $2y+9z=10$ என்பவையே.

இத்தளங்களின் தொடுபுள்ளிகள் முறையே $(3, \frac{1}{2}, 0)$; $(0, \frac{1}{2}, 1)$ ஆவன.

ஆகவே தொடுகை நாணின் சமன்பாடுகள்

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{0} = \frac{z}{-1}$ என்பனவாகும்.

மாதிரி 2 : நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{3}=1$ இன் ஒரு தொடுதளம் ஆய அச்சுகளை A, B, C இல் சந்திக்குமாறல், முக்கோணம் ABC இன் நடுக்கோட்டுச் சந்தியின் இயங்குவரை $\frac{3}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{1}{z^2}=3$ என நிறுவுக.

$\triangle ABC$ இன் நடுக்கோட்டுச் சந்தி $G\ (x_1, y_1, z_1)$ என்க. A,B,C ஆகியவற்றின் ஆய எண்கள் முறையே $(3x_1, 0, 0,)$, $(0, 3y_1, 0)$, $(0, 0, 3z_1)$ என்பனவாகும்.

தளம் ABC இன் சமன்பாடு $\frac{x}{3x_1}+\frac{y}{3y_1}+\frac{z}{3z_1}=1$ ஆகும்.

உட்பிரிவு 7·13 இன்படி தொடுகைக்குரிய நிப்பந்தனை $\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}=p^2$ இல், $l=\frac{1}{3x_1}$, $m=\frac{1}{3y_1}$, $n=\frac{1}{3z_1}$, $p=-1$, $A=\frac{1}{9}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=\frac{1}{3}$ எனப் பிரதியிட,

பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கின்றது.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{3y_1^2}+\frac{1}{3z_1^2}=1.$$

ஆகவே G இன் இயங்குவரை

$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3y^2}+\frac{1}{3z^2}=1$ என்பதாகும்.

மாதிரி 3 : கூம்பு வளையவுரு $ax^2+by^2+cz^2+1$ க்கு வரையப் படும் இரு தொடுதளங்கள் நேர்க்கோடு $u\equiv lx+my+nz-p=0$,

$u' \equiv l'x+m'y+n'z-p'=0$ வழியே செல்லுமென்றால், அத்தளங்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு,

$$u^2\left(\frac{l'^2}{a}+\frac{m'^2}{b}+\frac{n'^2}{c}-p'^2\right)-2uu'\left(\frac{ll'}{a}+\frac{mm'}{b}+\frac{nn'}{c}-pp'\right)$$

$$+u'^2\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{a}+\frac{n^2}{c}-p^2\right)=0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் வழியே செல்லும் தளத்தின் பொதுவான சமன்பாடு $u+\lambda u'=0$ என்பதே. ——(i)

அதாவது $(l+\lambda l')x+(m+\lambda m')y+(n+\lambda n')z-(p+\lambda p')=0$

இத் தளம் கூம்பு வளையவுருவை $P(x_1, y_1, z_1)$ இல் தொடுவதாகக் கொள்க.

P இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$axx_1+byy_1+czz_1=1$$

இரு சமன்பாடுகளும் P இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளத்தைக் குறிப்பதால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

ஆகவே, $$\frac{ax_1}{l+\lambda l'}=\frac{by_1}{m+\lambda m'}=\frac{cz_1}{n+\lambda n'}=\frac{1}{p+\lambda p'}$$

இவற்றிலிருந்து P இன் ஆய எண்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன.

P கொடுத்த கூம்பு வளையவுருவின்மேல் அமைவதால்,

$$\frac{1}{a}(l+\lambda l')^2+\frac{1}{b}(m+\lambda m')^2+\frac{1}{c}(n+\lambda n')^2=(p+\lambda p')^2$$

அதாவது,

$$\lambda^2\left(\frac{l'^2}{a}+\frac{m'^2}{b}+\frac{n'^2}{c}-p'^2\right)+2\lambda\left(\frac{ll'}{a}+\frac{mm'}{b}+\frac{nn'}{c}-pp'\right)$$

$$+\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}-p^2\right)=0 \text{ ——(ii)}$$

தொடர்புகள் (i), (ii) ஆகியவற்றிற்கிடையே λ ஐ நீக்க, தேவையான தொடுதளங்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

மாதிரி 4 : நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ க்குப் புள்ளி P இல் அமைந்த செங்கோடு தலையாய தளங்களைப் புள்ளிகள் G_1, G_2, G_3 ஆகியவற்றில் சந்திக்குமெனில், $PG_1 : PG_2 : PG_3 :: a^2 : b^2 : c^2$ என நிறுவுக.

P இன் ஆய எண்கள் (x_1, y_1, z_1) என்றால், செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}} \text{ ஆவன.}$$

இக் கோட்டின்மேல் ஒரு புள்ளியின் பொதுவான ஆய எண்கள்

$$\left\{x_1\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right),\ y_1\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right),\ z_1\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right)\right\}$$

என்பவையே.

செங்கோடு YOZ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியான G_1 ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$x=0$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore \lambda=-a^2$

ஆகவே G_1 இன் ஆய எண்கள் $\left\{0,\ y_1\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right),\ z_1\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)\right\}$ ஆவன.

$$PG_1^2 = x_1^2+y_1^2\cdot\frac{a^4}{b^4}+z_1^2\cdot\frac{a^4}{c^4}=a^4\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}\right)$$

$\triangle^2=\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$PG_1^2=a^4\triangle^2$ என்றாகும்.

ஆகவே $PG_1=a^2\triangle$; இதேபோல், $PG_2=b^2\triangle$; $PG_3=c^2\triangle$

$\therefore PG_1 : PG_2 : PG_3 :: a^2 : b^2 : c^2$.

மாதிரி 5 : நேர்க்கோடு $x=y-1=z-2$ இல் புள்ளி P நகருகின்றது. மேற்பரப்பு $ax^2+by^2+cz^2=1$ ஐப் பொருத்து அதன் இசைத்தளம் எப்போதும் நேர்க்கோடு $ax+1=-\frac{1}{2}(by-1)=cz$ வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

P இன் ஆய எண்கள் $(\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda)$ என்ற வடிவத்தில் தரப் படுகின்றன. கொடுத்த மேற்பரப்பைப் பொருத்து P இன் இசைத்தளம்

$ax\lambda+by(1+\lambda)+cz(2+\lambda)=1$ என்பதே.

i.e., $(by+2cz-1)+\lambda(ax+by+cz)=0$

λ துணையலகாக இருப்பதால், இத்தளம் $by+2cz-1=0$, $ax+by+cz=0$ என்ற தளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் கோட்டின் வழியாகச் செல்லுமென அறிகிறோம்.

அதாவது P இன் இசைத்தளம் பின்வரும் கோட்டின் வழியே செல்கிறது.

$ax+1=-\frac{1}{2}(by-1)=cz$

மாதிரி 6: நீள்வளையவுரு $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ இன் தொடுதளத்திற்கு, மேற்பரப்பு $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=1$ ஐப் பொருத்து அமையும் இசைப்புள்ளியின் இயங்குவரை ஒரு கோள மென்று நிறுவுக.

இசைப்புள்ளியை $P(x_1, y_1, z_1)$ என்போமெனில், கூம்பு வளையவுரு $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=1$ ஐப் பொருத்து P இன் இசைத் தளம் $\dfrac{xx_1}{a}+\dfrac{yy_1}{b}+\dfrac{zz_1}{c}=1$ ஆகும்.

இது கொடுத்த நீள்வளையவுருவைத் தொடுமென்றால், நிபந் தனையின்படி

$$\frac{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2}{\frac{1}{a^2}}+\frac{\left(\frac{y_1}{b}\right)^2}{\frac{1}{b^2}}+\frac{\left(\frac{z_1}{c}\right)^2}{\frac{1}{c^2}}=1$$

அதாவது, $x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$

ஆகவே P இன் இயங்குவரை பின்வரும் கோளமாகும்.

$$x^2+y^2+z^2=1$$

மாதிரி **7**: நீள்வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகளான (x_r, y_r, z_r) $r=1, 2, 3$ என்பவை வழியே செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{x(x_1+x_2+x_3)}{a^2}+\frac{y(y_1+y_2+y_3)}{b^2}+\frac{z(z_1+z_2+z_3)}{c^2}=1$$ எனக் காட்டுக.

தேவையான தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz=p$ எனக் கொள்க. இத்தளம் கொடுத்த துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள் வழியாகச் செல்வதால்,

$$lx_1+my_1+nz_1=p$$
$$lx_2+my_2+nz_2=p$$
$$lx_3+my_3+nz_3=p$$

இம் மூன்று தொடர்புகளை, முறையே x_1, x_2, x_3 ஆல் பெருக்கிக் கூட்டித் தெரிந்த முடிவுகளைப் பயன்படுத்தினால்,

$la^2=p(x_1+x_2+x_3)$ என்றாகும்.

இதேபோல்,

$$mb^2=p(y_1+y_2+y_3)$$
$$nc^2=p(z_1+z_2+z_3)$$

இவற்றிலிருந்து தேவையான சமன்பாடு பெறப்படுகின்றது.

மாதிரி **8**: கூம்பு $Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=0$ இன் மூன்று பிறப்பாக்கிகள் நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ க்குத் துணையிய அரைவிட்டங்களாக அமையுமெனில், $Aa^2+Bb^2+Cc^2=0$ என நிறுவுக.

OP, OQ, OR கொடுத்த நீள்வளையவுருவின் துணையிய அரை விட்டங்களெனக் கொள்க.

P, Q, R இன் ஆய எண்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ஆகுக.

இப் புள்ளிகள் கூம்பின்மேல் அமைவதால், பின்வரும் தொடர்புகள் கிடைக்கின்றன,

$$Ax_r^2+By_r^2+Cz_r^2+2Fy_rz_r+2Gz_rx_r+2Hx_ry_r=0 \quad (r=1, 2, 3)$$

இம்மூன்று தொடர்புகளையும் கூட்டினால்,

$A\Sigma x_1^2 + B\Sigma y_1^2 + C\Sigma z_1^2 + 2F\Sigma y_1z_1+2G\Sigma z_1x_1+2H\Sigma x_1y_1=0$ ஆகும்.

ஏற்கெனவே தெரிந்த முடிவுகளின்படி,

$Aa^2+Bb^2+Cc^2=0$ எனக் கிடைக்கின்றது.

மாதிரி 9: கோளம் $x^2+y^2+z^2=r^2$ இன் தொடுதளம் மேற்பரப்பு $ax^2+by^2+cz^2=1$ இல் உண்டாக்கும் வெட்டு முகத்தின் மையம் $(ax^2+by^2+cz^2)^2=r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$ என்ற மேற்பரப்பில் அமைகின்றதெனக் காட்டுக.

வெட்டு முகத்தின் மையம் $M(x_1, y_1, z_1)$ எனில், வெட்டுந் தளத்தின் சமன்பாடு

$ax_1(x-x_1)+by_1(y-y_1)+cz_1(z-z_1)=0$ என்பதே.

இது கொடுக்கப்பட்ட கோளத்திற்குத் தொடுதளமாயின், கோளத்தின் மையத்திலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $$\frac{\pm(ax_1^2+by_1^2+cz_1^2)}{\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2+c^2z_1^2}}=r$$

i.e., $(ax_1^2+by_1^2+cz_1^2)^2=r^2(a^2x_1^2+b^2y_1^2+c^2z_1^2)$

ஆகவே M இன் இயங்குவரை

$(ax^2+by^2+cz^2)^2=r^2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$ ஆகும்.

மாதிரி 10: மேற்பரப்பு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ க்குப் பின் வரும் முடிவுகளைக் காண்க.

(i) λ, μ தொகுதிகளைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகளின் திசைத் தகவுகள் முறையே $[a(\lambda^2-1), 2b\lambda, c(\lambda^2+1)]$; $[a(\mu^2-1), 2b\mu, -c(\mu^2+1)]$

(ii) $\lambda=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$ எனில், λ பிறப்பாக்கி, புள்ளி $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ வழியாகச் செல்லும்.

(iii) P உம் Q உம் அதிபரவளைவுருவில் விட்டமெதிர்ப் புள்ளிகள் (diametrically opposite points) ஆகவும், P இன் வழிச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகளின் துணையலகுகள் λ, μ ஆகவும் இருப் பின், Q இன் வழியே செல்லும் பிறப்பாக்கிகளின் துணையலகுகள் $-\dfrac{1}{\mu}$, $-\dfrac{1}{\lambda}$ ஆகும்.

(iv) இரு செங்குத்துப் பிறப்பாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரை கொடுத்த மேற்பரப்பும், கோளம் $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2$ உம் வெட்டிக்கொள்ளும் வளைவரையே.

(i) λ பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right)$;

$$\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)$$ ஆவன.

இதன் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனில்,

$$\frac{l}{a}-\frac{\lambda m}{b}+\frac{n}{c}=0$$

$$\frac{\lambda l}{a}+\frac{m}{b}-\frac{\lambda n}{c}=0$$

இவற்றிலிருந்து

$$\frac{l}{\frac{1}{bc}(\lambda^2-1)}=\frac{m}{\frac{2\lambda}{ac}}=\frac{n}{\frac{1}{ab}(\lambda^2+1)}$$

i. e., $$\frac{l}{a(\lambda^2-1)}=\frac{m}{2\lambda b}=\frac{n}{c(\lambda^2+1)}$$

ஆகவே இக்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் $[a(\lambda^2-1),\ 2\lambda b,\ c(\lambda^2+1)]$ ஆகின்றன.

இதேபோல μ பிறப்பாக்கியின் திசைத் தகவுகள் $[a(\mu^2-1),\ 2\mu b,\ -c(\mu^2+1)]$ எனக் கணக்கிடப்படும்.

(ii) $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right);$$

$$\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}$$

இக்கோடு தலையாய நீள்வளையத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண, $z=0$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\frac{x}{a} = \lambda \left(1+\frac{y}{b}\right)$$

$$\frac{\lambda x}{a} = \left(1-\frac{y}{b}\right)$$

அதாவது $\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{x}{a} = 2$

i. e., $\frac{x}{a} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}$

$\lambda = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x = a\cos\theta$$

மறுபடியும், $\lambda^2\left(1+\frac{y}{b}\right) = \left(1-\frac{y}{b}\right)$

i. e., $\frac{y}{b} = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$

λ வுக்குப் பிரதியிட, $\frac{y}{b} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad y = b\sin\theta$$

எனவே λ பிறப்பாக்கியில் அமைந்த புள்ளி $(a\cos\theta, b\sin\theta, c)$ ஆகின்றது.

(iii) λ, μ என்ற துணையலகுகளில் P இன் ஆய எண்கள் தரப்படுகின்றன. $x_P = \frac{a(\lambda+\mu)}{1+\lambda\mu}$

P, Q விட்டமெதிர்ப் புள்ளிகளாவதால்,

$$x_Q = -x_P$$

$$= \frac{-a\ (\lambda + \mu)}{1 + \lambda\mu}$$

$$= \frac{-a\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)}{\frac{1}{\lambda\mu} + 1}$$

$$= \frac{a\left(\frac{-1}{\lambda} - \frac{-1}{\mu}\right)}{1 + \left(\frac{-1}{\lambda}\right)\left(\frac{-1}{\mu}\right)}$$

Q இன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகளின் துணையலகுகள் λ', μ' எனில்,

$$x_Q = \frac{a\ (\lambda' + \mu')}{1 + \lambda'\ \mu'}$$

ஆகவே $\lambda' = -\frac{1}{\lambda}$ எனவும் $\mu' = -\frac{1}{\mu}$ எனவும் கிடைக்கின்றன. $y_Q = -y_P$, $z_Q = -z_P$ என்பவைகளை எளிதாகச் சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

(iv) இருவகைப் பிறப்பாக்கிகளின் திசைத் தகவுகள் $[a(\lambda^2-1),\ 2b\lambda,\ c(\lambda^2+1)]$, $[a(\mu^2-1),\ 2b\mu,\ -c(\mu^2+1)]$ என்பனவாகும்.

இவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $P\ (x_1, y_1, z_1)$ என்க.

பிறப்பாக்கிகள் செங்குத்தாக அமைவதால்,

$$a^2(\lambda^2-1)\ (\mu^2-1) + 4b^2\lambda\mu - c^2\ (\lambda^2+1)\ (\mu^2+1) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இரு புறமும் $(a^2+b^2-c^2)\ (1+\lambda\mu)^2$ ஐக் கழிக்க,

$-a^2\ (\lambda+\mu)^2 - b^2\ (1-\lambda\mu)^2 - c^2\ (\lambda-\mu)^2 = -\ (a^2+b^2-c^2)\ (1+\lambda\mu)^2$ என்றாகும்.

அதாவது, $$a^2\left(\frac{\lambda+\mu}{1+\lambda\mu}\right)^2 + b^2\left(\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}\right)^2 + c^2\left(\frac{\lambda-\mu}{1+\lambda\mu}\right)^2 = a^2+b^2-c^2$$

$$x_1 = \frac{a(\lambda+\mu)}{1+\lambda\mu}\,;\ y_1 = \frac{b(1-\lambda\mu)}{1+\lambda\mu}\,;\ z_1 = \frac{c(\lambda-\mu)}{1+\lambda\mu}$$

என்பதால், $x_1^2+y_1^2+z_1^2=a^2+b^2-c^2$ ஆகின்றது.

ஆகவே P இன் இயங்குவரை

$x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2-c^2$ என்ற கோளமாகும்.

இது அதிபரவளைவுருவின் குத்துத் தொடுதளக் கோளமாகும். P கொடுத்த மேற்பரப்பிலும் அமைவதால் அதன் இயங்குவரை இவ்விரு மேற்பரப்புகளின் வெட்டு வளைவரையேயாகும்.

பயிற்சி 7

1. கூம்பு வளையவுரு $2x^2-6y^2+3z^2=5$ ஐத் தொடும் இரு தளங்கள், நேர்க்கோடு $x+9y-3z=0=3x-3y+6z-5$ வழியே செல்லுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ஐ நேர்க்கோடு $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ சந்திக்கும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுதளங்களின் சமன்பாடுகள் யாவை ?

3. மேற்பரப்பு $3x^2-6y^2+9z^2+17=0$ க்கு வரையப்படும் தொடுதளங்கள் $3x+12y-6z=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக அமைந்தால், அவற்றின் சமன்பாடுகளையும் தொடுபுள்ளிகளின் ஆய எண்களையும் காண்க.

4. $a>b>c$ எனில், கோளம் $x^2+y^2+z^2=b^2$, நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ஆகியவற்றிற்குப் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகள், தளங்கள் $cx\sqrt{a^2-b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2}=0$ இல் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

   கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பில் தளங்கள் $cx\sqrt{a^2-b^2} \pm az\sqrt{b^2-c^2}=k$ (k யாதானுமொரு மாறிலி) ஆல் உண்டாகும் வெட்டுமுகங்கள் வட்டங்களென்பதை உய்த்தறிக.

5. மேற்பரப்பு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இல், தளம் $x+my+nz+p=0$ உண்டாக்கும் வெட்டு முகத்தில் ஏதாவது ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, தளம் $z=0$ ஐ Q இல் சந்திக்கிறது. Q இன் இயங்குவரை ஒரு கூம்பு வளைவரை என நிறுவுக.

6. நீள்வளையம் $\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1$; $z=0$ இன் தொடு கோட்டின் வழியாக நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ க்கு வரையப்படும் தொடுதளங்கள் செங்குத்தாக அமைகின்றன எனக்காட்டுக.

7. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இல் ஏதாவதொரு புள்ளி P இல் வரையப்படும் செங்கோடு $z=0$ தளத்தை G இல் சந்திக்குமெனில், PG இன் நடுப்புள்ளி பின்வரும் மேற்பரப்பில் அமையுமென நிறுவுக.

$$\frac{4a^2x^2}{(2a^2-c^2)^2}+\frac{4b^2y^2}{(2b^2-c^2)^2}+\frac{4z^2}{c^2}=1.$$

8. மேற்பரப்பு $ax^2+by^2+cz^2=1$ இன் மையத்திலிருந்து புள்ளி $P(x_1, y_1, z_1)$ இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p ஆகவும், P இல் வரையப்படும் மேற்பரப்பின் செங்கோட்டை மேற்பரப்பு வெட்டும் துண்டின் நீளம் q ஆகவும் அமைந்தால், பின்வரும் தொடர்பை நிறுவுக.

$$a^3x_1^2+b^3y_1^2+c^3z_1^2=\frac{2}{p^3q}$$

9. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ஐத் தளம் $2z=c$ சந்திக்கும் புள்ளிகளில் மேற்பரப்பிற்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளைத் தளம் $z=0$ வெட்டும் புள்ளிகள் பின்வரும் நீள்வளையத்தில் அமைகின்றன எனக் காட்டுக.

$$\frac{a^2x^2}{(a^2-c^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2-c^2)^2}=\frac{3}{4};\ z=0$$

10. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இல் P என்ற ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோடு, $x=0$ தளத்தை G இல் சந்திக்கின்றது. P இல் மேற்பரப்பின் தொடு தளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில், $PG=\frac{a^2}{p}$ என நிறுவுக.

G இன் வழியாக GH என்ற நேர்க்கோடு $PG=GH$ ஆக இருக்குமாறு x அச்சுக்கு இணையாக வரையப் படுகின்றது. H இன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a^2-b^2)}-\frac{z^2}{(a^2-c^2)}=1$ எனக் காட்டுக.

11. இருபடி மேற்பரப்பு $ax^2+by^2+cz^2=1$ க்குப் புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) இல் வரையப்படும் செங்கோடுகள் சந்திக்குமெனில்,

$\Sigma bc\,(x_1-x_2)(y_1z_2-y_2z_1)=0$ என நிறுவுக.

12. இருபடி மேற்பரப்புகள் $ax^2+by^2+cz^2=1$, $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ ஐப் பொருத்து நிலைத்த புள்ளி (f,g,h) வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் இசைக் கோடுகள் ஒரே தளத்தில் அமையுமெனில், அக் கோடுகளின் இயங்கு வரையைக் காண்க.

13. நேர்க்கோடுகள் $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$, $\frac{x-\alpha'}{l'}=\frac{y-\beta'}{m'}=\frac{z-\gamma'}{n'}$ ஆகியவை கூம்பு வளையவுரு $ax^2+by^2+cz^2=1$ ஐப் பொருத்து இசைக்கோடுகளாக அமைய நிபந்தனை களை அறிக.

14. மேற்பரப்பு $x^2+4y^2-5z^2=1$ ஐப் புள்ளி $(2,3,4)$ ஐ மைய மாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவரையில் வெட்டுந்தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. கூம்பு வளையவுரு $ax^2+by^2+cz^2=1$ ஐ வெட்டுந் தளங்கள் மேற்பரப்பு $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$ ஐத் தொடுமெனில், வெட்டு முகங்களின் மையங்களமையும் இயங்குவரை யாது?

16. கூம்பு வளைவரை $2x^2-3y^2+4z^2=1$; $4x+9y+4z+15=0$ இன் மையத்தைக் காண்க.

17. λ ஒரு துணையலகெனில், $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$ என்ற கூம்பு வளையவுருத் தொகுதியைப் பொருத்து, தளம் $lx+my+nz=p$ இன் இசைப் புள்ளிகள் இத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன என நிறுவுக.

18. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் தள வெட்டு முகத்தின் மையம் $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$ என்றால், அது தலையாய அச்சுகளின் முனைகள் வழியே செல்லும் எனக் காட்டுக.

19. இருபடி மேற்பரப்பு $ax^2+by^2+cz^2=1$ இல் ஆதியிலிருந்து p என்ற மாறுத தொலைவில் உள்ள தளங்கள் ஏற்படுத்தும் வெட்டு முகங்களின் மையங்கள் பின்வரும் மேற்பரப்பில் அமைகின்றன என நிறுவுக.
$ax^2+by^2+cz^2=p^2(a^2x^2+b^2x^2+c^2z^2)$

20. $p_o^2=\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+\frac{n^2}{c}$ எனில், $ax^2+by^2+cz^2-1=0=lx+my+nz-p$ என்ற கூம்பு வளைவரையின் மையம் $\left(\frac{lp}{ap_o^2}, \frac{mp}{bp_o^2}, \frac{np}{cp_o^2}\right)$ எனக் காட்டுக.

21. $ax^2+by^2+cz^2=1$ என்ற கூம்பு வளையவுருவும், $lx+my+nz=p$ என்ற தளமும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளில் மேற்பரப்பிற்குரிய செங்கோடுகளுக்கு இணையாக ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் கோடுகள் கூம்பு $p^2\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)$, $=\left(\frac{lx}{a}+\frac{my}{b}+\frac{nz}{c}\right)^2$ ஐப் பிறப்பிக்குமென நிறுவுக.

22. கொடுக்கப்பட்ட இரு கோடுகளின் மேல் ஒரு நீள் வளையவுருவின் மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் குத்து வீழல்கள் முறையே (p_1, p_2, p_3); (π_1, π_2, π_3) எனில், $p_1\pi_1+p_2\pi_2+p_3\pi_3$ ஒரு மாறிலியெனக் காட்டுக.

23. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள் வழியே செல்லும் தளத்திற்கு அதன் மையத்திலிருந்து வரையப் படும் செங்கோட்டடியின் இயங்குவரை $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=3(x^2+y^2+z^2)$ என நிறுவுக.

24. புள்ளிகள் (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) என்பவை நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள் என்றால், அவற்றின் வழியே செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு
$$\left(\frac{x_1}{a^2}+\frac{y_1}{b^2}+\frac{z_1}{c^2}\right)x+\left(\frac{x_2}{a^2}+\frac{y_2}{b^2}+\frac{z_2}{c^2}\right)y+\left(\frac{x_3}{a^2}+\frac{y_3}{b^2}+\frac{z_3}{c^2}\right)z=1$$
எனக் காட்டுக.

இத்தளம் பின்வரும் கோளத்தைத் தொடுகிறதெனவும் காட்டுக.
$$(x^2+y^2+z^2)\ (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2})=1$$

25. நீள் வளையவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் மூன்று துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள் $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$ எனவும், $OP=r_1$; $OQ=r_2$; $OR=r_3$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், பின்வருபன வற்றை நிறுவுக.

(i) கோளம் $OPQR$ இன் சமன்பாடு
$$x^2+y^2+z^2-r_1^2\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}\right)-r_2^2\left(\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}\right)-r_3^2\left(\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}\right)=0$$

(ii) ஆதி வழியாகவும் நீள் வளையவுருவின் சம துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள் வழியாகவும் செல்லும் கோள மையத்தின் இயங்கு வரை $12(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=(a^2+b^2+c^2)^2$ என்பதே.

26. அதிபரவளைவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் தலையாய நீள் வளைய வெட்டுமுகத்தில் P, Q என்பவை இரு

துணையிய அரை விட்டங்களின் முனைகள்; இப்புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகள் R, S என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றனவெனில், பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

(i) R, S இன் இயங்குவரை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2, \quad z \pm c$ என்ற நீள் வளையங்கள்.

(ii) $\widehat{RPS}=2\alpha,\ \widehat{RQS}=2\beta$ என இருப்பின்,
$\cot^2\alpha+\cot^2\beta=\frac{a^2+b^2}{c^2}$

(iii) நான்முகி $PSQR$ இன் கன அளவு மாறுததாகவும், $\frac{1}{3}abc$ க்குச் சமமாகவும் உள்ளது.

27. அதிபரவளைவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ இன் மேலமைந்த புள்ளி P இன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகள் தலையாய நீள்வளைய வெட்டு முகத்தைச் சத்திக்கும் புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்களின் (eccentric angles) வித்தியாசம் 2α எனில், P இன் இயங்குவரை, அதிபரவளைவுருவும், $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\cos^2\alpha$, என்னும் கூம்பும் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைவரை எனக் காட்டுக.

28 அதிபரவளைவுரு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ இன் மேலமைந்த புள்ளி P வழியே செல்லும் பிறப்பாக்கிகள் தலையாய நீள்வளைய வெட்டு முகத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் துணைவட்டக் கோணங்களில் ஒன்று மற்றதைப் போல மூன்று மடங்கானால், கொடுத்த மேற்பரப்பும், உருளை $y^2(z^2+c^2)=4b^2z^2$ உம் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைவரையில் P அமைகிறதென நிறுவுக.

29. அதிபரவளைவுருவின் தலையாய நீள் வளைய வெட்டு முகத்தின் நெட்டச்சு, குற்றச்சு முனைகள் வழியே செல்லும் ஒரே தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு பிறப்பாக்கிகளுக்கிடையே உள்ள மீச்சிறு தொலைவு $\frac{2abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ எனக் காட்டுக.

8. பரவளைவுரு
(Paraboloid)

8·1. பின்வரும் சமன்பாட்டில் குறிக்கப்படும் மேற்பரப்பைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

$$Ax^2+By^2+2Hz=0 \text{———} (1)$$

இதில் தளம் $y=c$ உண்டாக்கும் வெட்டுமுகம் பின்வரும் உருளையை அதே தளம் வெட்டும் வளைவரையேயாகும்.

$$Ax^2=-2Hz-Bc^2$$

இவ்வளைவரை c ஐச் சாராதபடி நேர் அகலம் (Latus-rectum) $\left|\frac{2H}{A}\right|$ ஐக் கொண்ட ஒரு பரவளைவாகும். இவ்வாறு c இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்குக் கிடைக்கும் இணை தளங்களால் உண்டாகும் வெட்டுமுகங்கள் யாவும் சமமான பரவளைவுகளாகும். இதே போல் $x=$ மாறிலி என்ற தளங்களால் உண்டாகும் வெட்டுமுகங்கள் $\left|\frac{2H}{B}\right|$ என்ற நேர் அகலமுடைய பரவளைவுகளாகும்.

தளம் $z=c$ மேற்பரப்பைப் பின்வரும் கூம்பு வளைவரையில் சந்திக்கின்றது.

$$Ax^2+By^2=-2Hc\,;\; z=c$$

$A, B, -2Hc$ ஒரே குறியை உடையனவாயிருந்தால், இது ஒரு மெய்யான நீள்வளையமாகும். A, B எதிரான குறிகளை உடையனவாயின், இது ஒரு மெய்யான அதிபரவளையமாகும்.

இவ்விதமாகப் பின்வரும் தன்மைகளுக்கேற்ப இரு வெவ்வேறு வகையான மேற்பரப்புகள் அமைவதை அறியலாம்,

(i) A உம் B உம் ஒரே குறியை உடையனவாயிருத்தல்.

(ii) A உம் B உம் எதிரான குறிகளை உடையனவாயிருத்தல்.

முதல்வகையில், பொதுத் தன்மையை இழக்காதபடி,

$A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $H = -\frac{1}{h}$ எனக் கொள்வோம்.

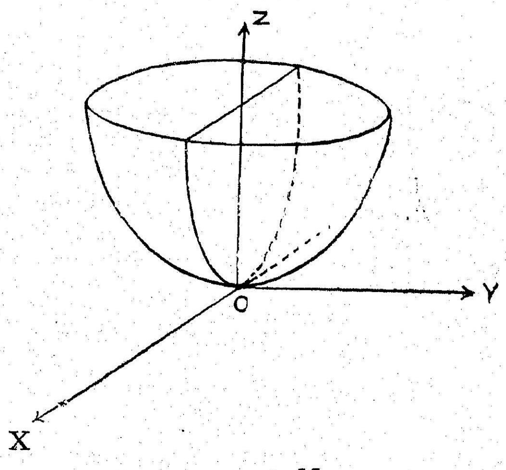
மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{h}$ என்ற வடிவத்தில் அமைகின்றது.

இதில் a, b, h நேரான கணியங்களாகக் கொள்ளப்படுகின்றன.

தளம் $z = kh$ ஏற்படுத்தும் வெட்டுமுகம் பின்வரும் நீள்வளையமாகும்.

$$\frac{x^2}{2ka^2} + \frac{y^2}{2kb^2} = 1;\ z = kh$$

இதுமெய்யாக அமைய k நேராக இருத்தல் வேண்டும்.



படம் 55

இம் மேற்பரப்பே நீள்வளைய பரவளைவுரு (**Elliptic Paraboloid**) என அழைக்கப்படும். இது முழுவதுமாக XOY தளத்தின் ஒரு பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது,

இரண்டாம் வகையில், பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$A = \frac{1}{a^2}, \; B = -\frac{1}{b^2}, \; H = -\frac{1}{h}$$

இங்கே, சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{h}$ என்ற வடிவத்தின் அமைகிறது.

இதில் $z=0$ தளத்தால் ஏற்படும் வெட்டுமுகம்

$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0; \; z=0$ என்ற நேர்க்கோடுகளாகும்.

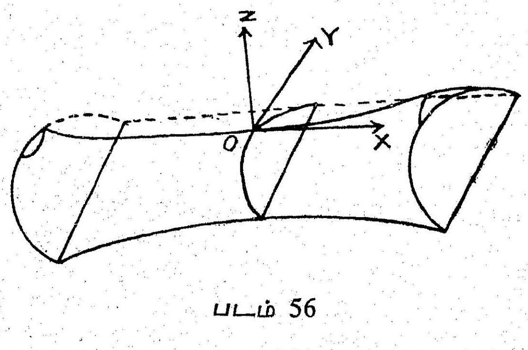
தளம் $z=kh$, மேற்பரப்பைப் பின்வரும் அதிபரவளைவில் சந்திக்கிறது.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k; \; z=kh$$

XYZ தளத்தில் இதன் குத்துவீழல் மேற்கண்ட நேர்க்கோடுகளை அணுகு கோடுகளாக **(asymptotes)**க் கொண்ட அதிபரவளையாகும்.

$k>0$ எனின், அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு **(transverse axis)** X அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

$k<0$ எனின், குறுக்கச்சு Y அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.



படம் 56

YOZ, ZOX தளங்களுக்கு இணையான தளங்களால் மேற்பரப்பில் ஏற்படும் வெட்டு முகங்கள் பரவளைவுகளாகும்.

இம் மேற்பரப்பு அதிபரவளைவுப் பரவளைவுரு **(Hyperbolic paraboloid)** என அழைக்கப்படும்.

8·2. ஒரு நேர்க்கோடும் பரவளைவுருவும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகள்

இருவகைப் பரவளைவுருக்களுக்கும் பொதுவான முடிவுகளை இப்போது ஆராயப்போவதால், சமன்பாட்டை $Ax^2+By^2+2Hz=0$ என்ற வடிவத்திலே எடுத்துக்கொள்வது பயனுள்ளதாயிருக்கும்.

நேர்க்கோடு $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் துணையலகுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டால் பெறப்படுகின்றன.

$$A\,(x_1+l\lambda)^2+B(y_1+m\lambda)^2+2H(z_1+n\lambda)=0$$

அதாவது $(Al^2+Bm^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Hn)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=$ ——— (1)

இது இருபடிச் சமன்பாடாக இருப்பதால் நேர்க்கோடு மேற்பரப்பை இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

8·3. தொடுதளமும் செங்கோடும்

புள்ளி $P\,(x_1, y_1, z_1)$ மேற்பரப்பில் அமைகிறதெனவும், P இன் வழியாகச் செல்லும் கோடு மேற்பரப்பைத் தொடுகிறதெனவும் கொள்க. நேர்க்கோடு மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகளும் P யோடு ஒன்றுபடும்.

ஆகவே சமன்பாடு (1) இன் இரு மூலங்களும் பூச்சியமாகின்றன.

$$\therefore\quad Alx_1+Bmy_1+Hn=0 \text{———} (2)$$

$$Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1=0 \text{———} (3)$$

தொடர்பு (3), P மேற்பரப்பில் அமைவதற்குரிய நிபந்தனையேயாகும். தொடர்பு (2) இன்படி, $(Ax_1,\ By_1\ H)$ என்ற திசைக்கு P இல் மேற்பரப்பின் தொடுகோடு செங்குத்தாக இருப்பதை அறியலாம். P இல் மேற்பரப்பைத் தொடும் எல்லாக் கோடுகளும் இத்திசைக்குச் செங்குத்தாக அமைகின்றன. ஆகவே இக்கோடுகள் யாவும் ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. இத் தளமே P இல் மேற்பரப்பின் தொடுதளமாகும்.

இதன் சமன்பாட்டை அறிய, பின்வரும் தொடர்புகளுக்கிடையே (l, m, n) ஆகியவற்றை நீக்கவேண்டும்.

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$$Alx_1+Bmy_1+Hn=0$$

அதாவது

$$A\,(x-x_1)x_1+B(y-y_1)y_1+H(z-z_1)=0$$

i.e., $Axx_1+Byy_1+Hz=Ax_1^2+By_1^2+Hz_1$

இருபுறமும் Hz_1 ஐச் சேர்த்து, தொடர்பு (3) ஐப் பயன்படுத்த தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$Axx_1+Byy_1+H\,(z+z_1)=0$ என்றாகும்.

P இல் இத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{Ax_1}=\frac{y-y_1}{By_1}=\frac{z-z_1}{H}$$

இதுவே P இல் பரவளைவுருவின் செங்கோடாகும்.

8·4. தொடுகைக்குரிய நிபந்தனை.

தளம் $lx+my+nz+p=0$ மேற்பரப்பை $P\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ இல் தொடுவதாகக் கொள்க.

P இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$Axx_1+Byy_1+H\,(z+z_1)=0$$

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால், அவை முழுதுமொத்தனவைகளாகும்.

ஆகவே, $$\frac{Ax_1}{l}=\frac{By_1}{m}=\frac{H}{n}=\frac{Hz_1}{p}$$

இப் பின்னங்களிலிருந்து தொடுபுள்ளியின் ஆய எண்கள் $\left(\frac{Hl}{An},\ \frac{Hm}{Bn},\ \frac{p}{n}\right)$ என அறிகிறோம்.

P மேற்பரப்பில் அமைவதால்,

$$A\left(\frac{Hl}{An}\right)^2+B\left(\frac{Hm}{Bn}\right)^2+2H\frac{p}{n}=0$$

அதாவது, $\frac{Hl^2}{A} + \frac{Hm^2}{B} + 2\,pn = 0$

இதுவே தொடுகைக்குரிய நிபந்தனையாகும்.

8·5. பரவளைவுருவைத்தொடும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காணல்

இத் தளங்கள் சந்திக்கும் புள்ளியை $P(x_1, y_1, z_1)$ என்க.

தளங்களின் சமன்பாடுகளை $l_r x + m_r y + n_r z + p_r = 0$ $(r = 1,2,3)$ ஆகக் கொள்க.

தொடுகைக்குரிய நிபந்தனையைப் பயன்படுத்தி, இவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$2l_r n_r x + 2m_r n_r y + 2n_r^2 z = \frac{Hl_r^2}{A} + \frac{Hm_r^2}{B}$$

தளத்திற்கு ஏதேனுமொரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசைத் தகவுகள் (l_r, m_r, n_r) ஆகும்.

செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $(\lambda_r, \mu_r, \gamma_r)$ எனில், $\lambda_r = k_r l_r$; $\mu_r = k_r m_r$; $\gamma_r = k_r n_r$

P இன் வழியாகத் தளங்கள் செல்லுவதால்,

$$2l_r n_r x_1 + 2m_r n_r y_1 + 2n_r^2 z_1 = \frac{Hl_r^2}{A} + \frac{Hm_r^2}{B}, \quad (r = 1, 2, 3)$$

இத்தொடர்பைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$2\lambda_r \gamma_r x_1 + 2\mu_r \gamma_r y_1 + 2\gamma_r^2 z_1 = \frac{H\lambda_r^2}{A} + \frac{H\mu_r^2}{B}, \quad (r = 1, 2, 3)$$

ஆகவே

$$2\lambda_1 \gamma_1 x_1 + 2\mu_1 \gamma_1 y_1 + \gamma_1^2 z_1 = \frac{H\lambda_1^2}{A} + \frac{H\mu_1^2}{B} \quad \text{—— (i)}$$

$$2\lambda_2 \gamma_2 x_1 + 2\mu_2 \gamma_2 y_1 + 2\gamma_2^2 z_1 = \frac{H\lambda_2^2}{A} + \frac{H\mu_2^2}{B} \quad \text{—— (ii)}$$

$$2\lambda_3 \gamma_3 x_1 + 2\mu_3 \gamma_3 y_1 + 2\gamma_3^2 z_1 = \frac{H\lambda_3^2}{A} + \frac{H\mu_3^2}{B} \quad \text{—— (iii)}$$

மூன்று தளங்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருப்பதால், $(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1)$; $(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$; $(\lambda_3, \mu_3, \gamma_3)$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகளின் திசைக் கொசைன்களாகும்.

இம்மூன்று தொடர்புகளையும் கூட்டி, ஏற்கெனவே தெரிந்த முடிவுகளைப் பயன்படுத்தினுல், பின்வரும் தொடர்பு கிடைக்கின்றது.

$$2z_1 = \frac{H}{A} + \frac{H}{B}$$

ஆகவே P இன் இயங்குவரை $2z = \frac{H}{A} + \frac{H}{B}$ என்ற தளமாகும்.

குறிப்பு: மையக் கூம்பு வளையவுருக்களில், இந்த இயங்குவரை ஒரு கோளமாக அமைவதை அறிவோம்.

8·6. கொடுத்த புள்ளியை மையமாக உடைய வெட்டுமுகம்

கொடுத்த புள்ளியை $M(x_1, y_1, z_1)$ எனவும், M ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாண் PQ ஐ $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ எனவும் கொள்க.

PQ மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் துணையலகுகள் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படுகின்றன.

$$(Al^2+Bm^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Hn)\lambda + (Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1) = 0 \quad \text{———} (1)$$

PQ இன் நடுப்புள்ளியாக $M(x_1, y_1, z_1)$ இருப்பதால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அளவில் சமமானவையாகவும், குறியில் எதிரானவையாகவும் இருக்கின்றன.

$$\therefore \quad Alx_1+Bmy_1+Hn=0$$

இதிலிருந்து (Ax_1, By_1, H) என்ற நிலைத்த திசைக்கு PQ செங்குத்தாக இருப்பதை அறியலாம். PQ ஐப் போன்று இத்தொடர்பில் பொருந்தும் எல்லா நாண்களும் பின்வரும் தளத்தில் அமைகின்றன.

$$Ax_1(x-x_1)+By_1(y-y_1)+H(z-z_1)=0$$

$T \equiv Axx_1+Byy_1+H(z+z_1)$; $S_1 \equiv Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1$ எனில், இச் சமன்பாடு குறியீட்டு முறையில், $T=S_1$ என்று எழுதப்படும். இதுவே தேவையான தளத்தில் சமன்பாடாகும். இத் தளம் பரவளைவுருவில் உண்டாக்கும் வெட்டுமுகம் புள்ளி (x_1, y_1, z_1) ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு கூம்பு வளைவரையாகும்.

8·7. இணை நாண்களை இருசமக் கூறிடும் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காணல்

நாண்களின் தொகுதி (l, m, n) என்ற திசையில் அமைவதாகக் கொள்க. இத் தொகுதியைச் சேர்ந்த ஒரு நாணின் நடுப் புள்ளி $M\ (x_1, y_1, z_1)$ என்க. உட்பிரிவு 8·6 இல் கண்டபடி,

$$Alx_1+Bmy_1+Hn=0$$

இதில் l, m, n ஆகியவை நிலைத்த கணியங்கள். ஆகவே M இன் இயங்குவரை $Alx+Bmy+Hn=0$ என்பதே.

கொடுத்த திசையில் அமைந்த எல்லா நாண்களையும் இருசமக் கூறிடும் இத்தளம் Z அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதை அறிக.

8·8. சுற்றி வரையப்படும் உருளையின் சமன்பாட்டினை அறிதல்

(l, m, n) என்ற கொடுத்த திசையில் அமைந்த தொடுகோட்டின் மேல் புள்ளி $P\ (x_1, y_1, z_1)$ ஐ எடுத்துக் கொள்க.

நேர்க்கோடு $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ மேற்பரப்பைத் தொடுவதால், இரு சந்திக்கும் புள்ளிகளும் ஒன்றுபடும். ஆகவே பின்வரும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாக உள்ளன.

$$(Al^2+Bm^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Hn)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

எனவே இச்சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியத்திற்குச் சமமாக வேண்டும்.

அதாவது $(Alx_1+Bmy_1+Hn)^2-(Al^2+Bm^2)(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$

l, m, n ஆகியவை நிலைத்த மாறிலிகள்.

இத் தொடர்பிலிருந்து P இன் இயங்குவரை

$$(Alx+Bmy+Hn)^2=(Al^2+Bm^2)(Ax^2+By^2+2Hz) \text{ ஆகும்.}$$

இதுவே தேவையான உருளையின் சமன்பாடு. இதன் பிறப்பாக்கிகள் (l, m, n) என்ற திசையில் உள்ளன.

8·9. கொடுத்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டைப் பரவளைவுரு பிரிக்கும் விகிதங்களைக் காணல்

கொடுத்த புள்ளிகளை $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்க.

PQ ஐ $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆய எண்கள் $\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$ ஆவன.

இப்புள்ளி பரவளைவுருவில் அமையுமெனில்,

$$A\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}\right)^2+B\left(\frac{y_1+ky_2}{1+k}\right)^2+2H\left(\frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)=0$$

இதிலிருந்து k இல் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கின்றது.

$$k^2(Ax_2^2+By_2^2+2Hz_2)+2k[Ax_1x_2+By_1y_2+H(z_1+z_2)]+(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

இதன் மூலங்கள் PQ மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் இரு புள்ளிகள் PQ ஐப் பிரிக்கும் விகிதங்களாகும்.

8·10. இசைத்தளமும் இசைப்புள்ளியும்

PQ ஐப் பரவளைவுரு இசைபடப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். P இன் ஆய எண்கள் (x_1, y_1, z_1) எனவும் Q இன் ஆய எண்கள் (x', y', z') எனவும் ஆகுக.

மேற்பரப்பு PQ ஐ இசைபடப் பிரிக்குமெனில், பின்வரும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் அளவில் சமமானவையாகவும் குறியில் எதிரானவையாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

$$k^2(Ax'^2+By'^2+2Hz')+2k[Ax_1x'+By_1y'+H(z_1+z')]+(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

இசைபடப் பிரித்தலின் நிபந்தனையின்படி,

மூலங்களின் கூடுதல் $=0$

$$\therefore \quad Ax_1x'+By_1y'+H(z_1+z')=0$$

P நிலைத்த புள்ளியாக இருந்து, அதன் இசைத் துணையாக அமையும்படி Q மாறுவதானால், Q இன் இயங்குவரை

$Ax_1x+By_1y+H(z_1+z)=0$ என்ற தளமாகும்.

இதுவே பரவளைவுருவைப் பொருத்து P இன் இசைத்தள மெனப்படும். பரவளைவுருவைப் பொருத்து, தளம் $lx+my+nz+p=0$ இன் இசைப்புள்ளி $\left(\frac{Hl}{An}, \frac{Hm}{Bn}, \frac{p}{n}\right)$ என அறியலாம்.

8·11. **தொடு கூம்பின் சமன்பாட்டைக் காணல்**

கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து மேற்பரப்பிற்கு வரையப் படும் தொடுகோடுகள் அமையும் மேற்பரப்பே தொடு கூம்பாகும்.

$P(x_1, y_1, z_1)$ கொடுத்த புள்ளியாகவும், P இலிருந்து பரவளை வுருவிற்கு வரையப்படும் ஒரு தொடுகோட்டின் சமன்பாடுகள் $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ எனவும் கொள்க.

இக்கோடு மேற்பரப்பை ஒன்றிய புள்ளிகளில் சந்திப்பதால், பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமாகும்.

$$(Al^2+Bm^2)\lambda^2+2(Alx_1+Bmy_1+Hn)\lambda+(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

இச்சமன்பாட்டின் தன்மை காட்டி பூச்சியத்திற்குச் சமமாக வேண்டும்.

ஆகவே $$(Alx_1+By_1++Hn)^2-(Al^2+Bm^2)(Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

இத் தொடர்பிற்கும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடுகளுக்கு மிடையே l, m, n ஆகியவற்றை நீக்க,

$$[Ax_1(x-x_1)+By_1(y-y_1)+H(z-z_1)]^2 = [A(x-x_1)^2+B(y-y_1)^2](Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)$$

வழக்கமான குறியீடுகளில், இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$T^2=SS_1$$

இதுவே $H(x_1, y_1, z_1)$ ஐ உச்சியாகக் கொண்ட தொடு கூம்பின் சமன்பாடாகும்.

8·12. கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுருவிற்கு வரையப் படும் செங்கோடுகளின் எண்ணிக்கை

கொடுத்த புள்ளியை $H(f, g, h)$ என்க. மேற்பரப்பில் $P(x_1, y_1, z_1)$ என்ற புள்ளியை அடியாகக் கொண்ட செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{Ax_1} = \frac{y-y_1}{By_1} = \frac{z-z_1}{H}$$

இக்கோட்டின் மேல் H அமைவதால்,

$$\frac{f-x_1}{Ax_1} = \frac{g-y_1}{By_1} = \frac{h-z_1}{H}$$

ஒவ்வொரு பின்னத்தையும் r க்குச் சமமாகக் கொள்க.

இவற்றிலிருந்து $x_1 = \frac{f}{1+Ar}$; $y_1 = \frac{g}{1+Br}$; $z_1 = h-Hr$ ஆகும்.

P பரவளைவுருவின் மேல் அமைவதால்,

$$\frac{Af^2}{(1+Ar)^2} + \frac{Bg^2}{(1+Br)^2} + 2H(h-Hr) = 0$$

இத்தொடர்பு r இல் ஐந்தாம்படிச் சமன்பாடாகையால், r இன் ஐந்து மதிப்புக்களுக்கு ஏற்றவாறு மேற்பரப்பில் ஐந்து புள்ளிகள் உள்ளன. இந்த ஐந்து புள்ளிகளிலும் பரவளைவுருவிற்குரிய செங்கோடுகள் H வழியாகச் செல்லுகின்றன. எனவே ஒரு புள்ளியிலிருந்து, பொதுவாக, பரவளைவுருவிற்கு ஐந்து செங்கோடுகள் வரைய முடியுமென அறிகிறோம்.

துணைமுடிவு

மையக் கூம்பு வளையவுருவிலே காண்பித்தது போலவே, இங்கும் இந்த ஐந்து செங்கோட்டடிகளும் பின்வரும் முப்படி வளைவரையிலே அமைகின்றன என்பதை அறியலாம்.

$$x = \frac{f}{1+Ar} \; ; \; y = \frac{g}{1+Br} \; ; \; z = h-Hr$$

8·13. துணையிய விட்ட தளங்கள்

பரவளைவுருவின் அச்சுக்கு இணையாக அமைந்த தளமானது விட்ட தளம் எனப்படும். மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $Ax^2+By^2+2Hz=0$ என்ற வடிவத்திலிருந்தால் Z அச்சு பரவளைவுருவின்

அச்சாக அமையும். பின்வரும் இரு விட்ட தளங்களை எடுத்துக் கொள்க.

$$lx+my+p=0 \text{———} (i)$$
$$l'x+m'y+p'=0 \text{———} (ii)$$

$\left(\frac{l}{A}, \frac{m}{B}, \frac{p}{H}\right)$ என்ற திசைக்கு இணையாக உள்ள நாண் களைத் தளம் (i) இருசமக் கூறிடுகின்றது. தளம் (ii) இத்திசைக்கு இணையாக இருக்கவேண்டுமெனில்,

$$\frac{ll'}{A} + \frac{mm'}{B} = 0 \text{ ஆகும்.} \text{———} (ii)$$

முடிவு (iii) சமச்சீராக இருப்பதால், தளம் (ii) ஆல் இரு சமக் கூறிடப்படும் நாண்களுக்குத் தளம் (i) இணையாக அமையு மென்பதைக் காட்டுகின்றது. இவ்வாறு உள்ள இரு தளங்களே துணையிய விட்ட தளங்களென அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட இருதளங்கள் பரவளைவிற்குத் துணையிய விட்ட தளங்களாக அமைய நிபந்தனையே தொடர்பு (iii) ஆகும்.

8·14. பிறப்பாக்கிகள்

நேர்க்கோடு $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ பரவளைவுருவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் துணையலகுகள் பின்வரும் இருபடிச் சமன் பாட்டால் தரப்படுகின்றன என்பதை அறிவோம்.

$$(Al^2+Bm^2)\lambda^2 + 2(Alx_1+Bmy_1+Hn)\lambda + (Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1)=0$$

நேர்க்கோடு முழுவதும் மேற்பரப்பில் அமையுமெனில், இச் சமன்பாடு λ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துவதாக இருக்கும். அதாவது இது ஒரு முற்றொருமையாக அமையும்.

ஆகவே இக்கோடு மேற்பரப்பின் பிறப்பாக்கியாகுமெனில், பின்வரும் நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன.

$$Al^2+Bm^2=0 \text{———} (i)$$
$$Alx_1+Bmy_1+Hn=0 \text{———} (ii)$$
$$Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1=0 \text{———} (iii)$$

நிபந்தனை (ii) இன்படி P இன் வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கி அப்புள்ளியில் மேற்பரப்பில் தொடுதளத்தில் அமைகிறது. தொடுதளத்தால் மேற்பரப்பில் உண்டாகும் வெட்டுமுகம் ஓர் இருபடி வளைவரையாகும். இதில் ஒரு பகுதி P வழியே செல்லும் பிறப்பாக்கியாதலால், வெட்டு முகம் இரு நேர்க்கோடுகளாகின்றது. இதைச் சேர்ந்த மற்றொரு நேர்க்கோடும் மேற்பரப்பின் பிறப்பாக்கியாகும். ஆகவே P இல் இவ்விரு பிறப்பாக்கிகளும் சந்திக்கின்றன.

நிபந்தனை (i) இலிருந்து, A உம் B உம் ஒரே குறியையுடையனவாயின், பிறப்பாக்கிகள் கற்பனையானவைகளாகும். ஆகவே அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவொன்றே மெய்யான பிறப்பாக்கிகளை உடையதாயிருக்கின்றது.

அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\frac{2z}{h}$$

நேர்க்கோடுகள் $\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{z}{h}$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\lambda$ ஆகியவை λ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் ஒருவகைப் பிறப்பாக்கிகளாகின்றன.

இதேபோல் நேர்க்கோடுகள் $\mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\frac{z}{h}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2\mu$ ஆகியவை μ இன் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் மற்றொரு வகைப் பிறப்பாக்கிகளாகவும் அமைகின்றன.

λ பிறப்பாக்கிகள் யாவும் $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ என்ற நிலைத்த தளத்திற்கு இணையாக உள்ளன.

μ பிறப்பாக்கிகள் யாவும் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக உள்ளன.

ஒரே தொகுதியைச் சேர்ந்த இரு பிறப்பாக்கிகள் வெட்டிக் கொள்வதில்லை என்பதை எளிதாக அறியலாம்.

இரு தொகுதிகளைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகள் சந்திக்கும் புள்ளி யின் ஆய எண்கள் துணையலகுகள் λ, μ இல் பின்வருமாறு தரப் படுகின்றன.

$$[a(\lambda+\mu),\ b(\mu-\lambda),\ 2h\lambda\mu]$$

ஆதி வழியாகச் செல்லும் பிறப்பாக்கிகளைக் கண்டுபிடிக்க, $\lambda=0=\mu$ எனப் பிரதியிடவேண்டும்.

குறிப்பு : செங்குத்துப் பிறப்பாக்கிகள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் இயங்குவரை பரவளைவுருவைத் தளம் $2Hz=a^2-b^2$ வெட்டும் வளைவரையேயாகும்.

மாதிரி 1 : தளம் $8x-6y-z=5$, பரவளைவுரு $3x^2-2y^2=6z$ ஐத் தொடுமெனக் காட்டுக. தொடு புள்ளியையும் காண்க.

தொடுபுள்ளி $P\ (x_1, y_1, z_1)$ என்க.

P இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு $3xx_1-2yy_1-3(z+z_1)=0$ என்பதே.

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிக்குமென்றால், அவை முழுதுமொத்தவையாகும்.

$$\therefore\quad \frac{3x_1}{8}=\frac{-2y_1}{-6}=\frac{-3}{-1}=\frac{-3z_1}{-5}$$

இவற்றிலிருந்து $x_1=8$; $y_1=9$; $z_1=5$

P இன் ஆய எண்கள் பரவளைவுருவின் சமன்பாட்டில் பொருந்துவதால் கொடுத்த தளம் P இல் மேற்பரப்பின் தொடு தளமாகும்.

மாதிரி 2 : புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இல் பரவளைவுரு $Ax^2+By^2+2Hz=0$ இன் தொடுதளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்கோட்டின் நீளம் p எனில், இப்புள்ளியில் மேற்பரப்பிற்குரிய செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் $\left(\frac{Ax_1p}{Hz_1}, \frac{By_1p}{Hz_1}, \frac{p}{z_1}\right)$ என நிறுவுக.

புள்ளி (x_1, y_1, z_1) இல் தொடுதளத்தின் சமன்பாடு

$$Axx_1+Byy_1+H\ (z+z_1)=0$$

$$\therefore \quad p = \frac{Hz_1}{\sqrt{A^2x_1^2+B^2y_1^2+H^2}} \quad \text{———(i)}$$

இப் புள்ளியில் பரவளைவுருவிற்குரிய செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் (λ, μ, γ) எனில், இவை முறையே (Ax_1, By_1, H) ஆகியவற்றிற்கு விகிதப் பொருத்தத்திலிருக்கின்றன.

$$\therefore \quad \frac{\lambda}{Ax_1} = \frac{\mu}{By_1} = \frac{\gamma}{H} = \frac{1}{\sqrt{A^2x_1^2+B^2y_1^2+H^2}}$$

$$= \frac{p}{Hz_1} \text{ (முடிவு (i) இன்படி)}$$

ஆகவே செங்கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள்

$$\left(\frac{Ax_1p}{Hz_1}, \frac{By_1p}{Hz_1}, \frac{p}{z_1}\right) \text{ ஆவன.}$$

மாதிரி 3 : $k^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + np$ எனில், கூம்பு வளைவரை $ax^2+by^2=2z$; $lx+my+nz=p$ இன் மையம் $\left(-\frac{l}{an}, \frac{-m}{bn}; \frac{k^2}{n^2}\right)$ எனக் காட்டுக.

கொடுத்துள்ள கூம்பு வளைவரையின் மையம் $M\,(x_1, y_1, z_1)$ எனக் கொள்க.

வெட்டுந்தளத்தின் சமன்பாடு $T=S_1$ ஆகும்.

அதாவது $axx_1+byy_1-(z+z_1)=ax_1^2+by_1^2-2z_1$

i.e., $axx_1+byy_1-z=ax_1^2+by_1^2-z_1$

இத் தளத்தின் சமன்பாடு கேள்வியில் உள்ளபடி

$$lx+my+nz=p \text{ ஆகும்.}$$

இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே தளத்தைக் குறிப்பதால் முழுது மொத்தவையாகும்.

$$\therefore \quad \frac{ax_1}{l} = \frac{by_1}{m} = \frac{-1}{n} = \frac{ax_1^2+by_1^2-z_1}{p}$$

இவற்றிலிருந்து

$$x_1 = \frac{-l}{an},\ y_1 = \frac{-m}{bn}$$

$$-\frac{p}{n} = ax_1^2+by_1^2-z_1 \text{ ஆகும்.}$$

x_1, y_1 ஆகியவைகளுக்குப் பிரதியிட,

$$n^2 z_1 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + np$$

$$\therefore\ z_1 = \frac{k^2}{n^2}$$

ஆகவே மையத்தின் ஆய எண்கள் $\left(\frac{-l}{an}, \frac{-m}{bn}, \frac{k^2}{n^2}\right)$ ஆவன.

மாதிரி 4 : $Ax^2+By^2+2Hz=0$ என்ற பரவளைவுருவின் செங்கோட்டடிகள் தளம் $z=c$ இல் அமைகின்றன. இச் செங்கோடுகள் $z=0$ தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கூம்பு வளைவரையில் உள்ளன என நிறுவுக.

செங்கோட்டடிகளில் ஒன்று $P(x_1, y_1, z_1)$ என்க.

மேற்பரப்பிலும் தளம் $z=c$ இலும் P அமைவதால்,

$$\left.\begin{aligned} Ax_1^2+By_1^2+2Hz_1=0 \\ z_1=c \end{aligned}\right\} \text{———(i)}$$

P இல் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x-x_1}{Ax_1} = \frac{y-y_1}{By_1} = \frac{z-z_1}{H} \text{ ஆகும்.}$$

இச் செங்கோடு $z=0$ தளத்தை $Q(x', y', z')$ இல் சந்திக்குமெனில்,

$$\frac{x'-x_1}{Ax_1} = \frac{y'-y_1}{By_1} = \frac{z'-z_1}{H} = \lambda \text{ (என்க);}$$

$$z'=0 \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $x'=x_1(A\lambda+1)$, $y'=y_1(B\lambda+1)$, $\lambda=\frac{-z_1}{H}$

$z_1=c$ என்பதால், $\lambda=\frac{-c}{H}$

$$\therefore\ x'=\frac{x_1(H-Ac)}{H}\ ;\ y'=\frac{y_1(H-Bc)}{H}$$

இவற்றிலிருந்து $x_1=\frac{Hx'}{H-Ac}$, $y_1=\frac{Hy'}{H-Bc}$ ஆகும்.

இவற்றைத் தொடர்பு (1) இல் பிரதியிட,

$$A\cdot\frac{H^2x'^2}{(H-Ac)^2}+B\cdot\frac{H^2y'^2}{(H-Bc)^2}+2Hc=0$$

$$i.e.,\quad \frac{AHx'^2}{(H-Ac)^2}+\frac{BHy'^2}{(H-Bc)^2}+2c=0$$

ஆகவே Q இன் இயங்குவரை

$\frac{AHx^2}{(H-Ac)^2}+\frac{BHy^2}{(H-Bc)^2}+2c=0$; $z=0$ என்ற கூம்பு வளைவரையேயாகும்.

மாதிரி 5 : பரவளைவுரு $x^2-y^2=2z$ இன் பிறப்பாக்கிகள் புள்ளி (3, 1, 4) வழியாகச் செல்லுமெனில், அவற்றின் சமன்பாடுகள் $2x-2=2y+2=z$; $4x-8=-4y+8=z$ எனக் காட்டுக.

கொடுத்த பரவளைவுருவின் λ, μ பிறப்பாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு எழுதப்படுகின்றன.

$\lambda(x+y)=z,\quad x-y=2\lambda$;

$\mu(x-y)=z,\quad x+y=2\mu$

பிறப்பாக்கிகள் புள்ளி (3, 1, 4) வழிச் செல்வதால்,

$\lambda=1$, $\mu=2$ என்ற மதிப்புக்கள் கிடைக்கின்றன.

இப் புள்ளி வழிச் செல்லும் λ பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடுகள்

$x+y=z,\quad x-y=2$

இவை பின்வரும் வடிவத்தில் அமைக்கப்படுகின்றன.

$$2x-2=2y+2=z$$

μ பிறப்பாக்கியின் சமன்பாடுகள்

$$2(x-y)=z, \quad x+y=4$$

அதாவது $4x-8=-4y+8=z$

மாதிரி 6 : ஆதியின் வழியாக வரையப்படும் தளங்கள் P பரவளைவுரு $x^2-y^2=az$ இன் பிறப்பாக்கிகள் வழியாகச் செ கின்றன. $OP=r$ எனில், தளங்களுக்கிடையே உள்ள கோண $\tan^{-1}\left(\frac{2r}{a}\right)$ என நிறுவுக.

λ, μ பிறப்பாக்கிகளின் சமன்பாடுகள்

$\lambda(x+y)=z,\ x-y=a\lambda$;

$\mu(x-y)=z,\ x+y=a\mu$ ஆவன.

ஆதி வழியாகவும் இப் பிறப்பாக்கிகள் வழியாகவும் செல்லும் தளங்கள் $\lambda x+\lambda y-z=0,\ \mu x-\mu y-z=0$ ஆகும்.

இவற்றின் இடையே உள்ள கோணம் θ என்றால்,

$$\tan^2\theta=2(2\lambda^2\mu^2+\lambda^2+\mu^2) \text{———} (\mathrm{i})$$

P இன் ஆய எண்கள் $\left\{\frac{a}{2}(\mu+\lambda), \frac{a}{2}(\mu-\lambda), a\mu\lambda\right\}$

$$\therefore \quad OP^2=\frac{a^2}{4}(\mu+\lambda)^2+\frac{a^2}{4}(\mu-\lambda)^2+a^2\mu^2\lambda^2$$

$$=\frac{a^2}{2}(2\lambda^2\mu^2+\lambda^2+\mu^2)$$

i. e., $r^2=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\tan^2\theta$ (முடிவு (i) இன்படி)

அதாவது, $\tan^2\theta=\frac{4r^2}{a^2}$

தளங்களுக்கிடையே உள்ள குறுங்கோணம் பின்வரும் வாய்பாட்டால் பெறப்படுகின்றது.

$$\tan\theta=\frac{2r}{a} \text{ (அ.) } \theta=\tan^{-1}\left(\frac{2r}{a}\right)$$

பயிற்சி 8

1. பரவளைவுரு $x^2-2y^2=3z$ ஐத் தளம் $2x-4y-z+3=0$ தொடுகிறதெனக் காட்டி, தொடு புள்ளியையும் அறிக.

2. நேர்க்கோடு $u\equiv lx+my+nz+p=0,\ u'\equiv l'x+m'y+n'z+p'=0$ வழியாக மேற்பரப்பு $ax^2+by^2=2z$ க்கு வரையப் படும் தொடுதளங்களின் கூட்டுச் சமன்பாடு

$$u^2\left(\frac{l'^2}{a}+\frac{m'^2}{b}+2n'p'\right)-2uu'(ll'+mm'+np'+n'p)$$

$$+u'^2\left(\frac{l^2}{a}+\frac{m^2}{b}+2np\right)=0$$ என நிறுவுக.

3. புள்ளி (2, 3, 4) ஐ மையமாகக்கொண்ட ஒரு கூம்பு வளை வரையில் ஒரு தளம் பரவளைவுரு $x^2-\frac{1}{2}y^2=z$ ஐச் சந்தித் தால், தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

4. புள்ளி (2, 3, 4) வழிச் செல்லும் நாண் பரவளைவுரு $5x^2-6y^2=7z$ இன் விட்ட தளமான $10x-24y=21$ ஆல் இருசமக் கூறிடப்படுமெனில், அதன் சமன்பாடுகளை அறிக.

5. புள்ளி (1, 1, 1) இல் பரவளைவுரு $x^2+y^2=2z$ இன் செங் கோடு மறுபடியும் மேற்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

6. பரவளைவுரு $ax^2+by^2=2z$ க்கு வரையப்படும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் இயங்குவரையைக் காண்க.

7. புள்ளி (α, β, γ) இலிருந்து $x^2+y^2=2az$ என்ற பரவளைவுரு விற்கு வரையப்படும் மூன்று செங்கோடுகளின் அடிகள் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $\left(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma+a}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

8. பரவளைவுருவிற்குப் பொதுவாக ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் ஐந்து செங்கோடுகள் அமைந்த இருபடிக் கூம்பின் சமன்பாட்டை அறிக.

9. பரவளைவுருக்கள் $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=\frac{2z}{c_1}$, $\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=\frac{2z}{c^2}$, $\frac{x^2}{a_3^2}+\frac{y^2}{b_3^2}=\frac{2z}{c_3}$ ஆகியவற்றிற்கு ஒரு பொதுவான தொடுதளம் அமையுமெனில், $\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ என நிறுவுக.

10. பரவளைவுரு $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ இன் ஒரு தொகுதியைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கிகளுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் இயங்குவரை $x^2+y^2+2z^2-\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)xy=0$ எனக் காட்டுக.

11. முந்தைய கேள்வியில், பிறப்பாக்கிகளுக்கு, கோளம் $x^2+y^2+z^2=a^2$ ஐப் பொருத்து அமைந்த இசைக்கோடுகளின் இயங்குவரை இருபடி மேற்பரப்பு $x^2-y^2=-2az$ என நிறுவுக.

12. $xy=az$ என்ற பரவளைவுருவின் பிறப்பாக்கிகள் நிலைத்த கோணம் α இல் வெட்டிக்கொள்ளுமெனில், சந்திக்கும் புள்ளிகளின் இயங்குவரை கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பும், அதிபர வளைவுரு $x^2+y^2-z^2\tan^2\alpha+a^2=0$ உம் வெட்டிக் கொள்ளும் வளைவரையேயாகுமெனக் காட்டுக.

13. சமன்பாடுகள் $2x=ae^{2\varphi}$, $y=be^{\varphi}\cos h\,\theta$, $z=ce^{\varphi}\sin h\theta$ ஓர் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுருவைத் தீர்மானிக்கின்றன எனக் காண்பி. ஒரு தொகுதியைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கியின் புள்ளிகளுக்கு $\theta+\varphi$ மாறுதது எனவும், மற்றொரு தொகுதியைச் சேர்ந்த பிறப்பாக்கியின் புள்ளிகளுக்கு $\theta-\varphi$ மாறுதது எனவும் காட்டுக.

14. ஒரு நிலைத்த கோட்டில் அமைந்த மாறும் புள்ளியிலிருந்து இரு நிலைத்த கோடுகளுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. முதற்கோடு மற்ற இரு கோடுகளின் மீச்சிறுதொலைவுக் கோட்டைச் சந்திக்கிறது. செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் இயங்குவரை ஓர் அதிபரவளைவுப் பரவளைவுரு எனவும், அதன் ஒரு தொகுதிப் பிறப்பாக்கிகள் மீச்சிறு தொலைவுக் கோட்டைச் செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன எனவும் நிறுவுக.

விடைகள்

பயிற்சி 1

(1) 2 (அ.) 8 (5) $-\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{7}$ (8) 7 ; $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$

(9) (1, 2, 2) (10) $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$; $\cos^{-1}\left(\frac{a^2 \pm b^2 \pm c^2}{a^2+b^2+c^2}\right)$

(11) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$; 90° (12) $\frac{-4}{3}$; $\frac{-4}{3}$

பயிற்சி 2

(1) -3 ; -4 ; 6 (2) 2, $(\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ (3) $3x-4y+7z+37=0$ (7) $2x+3y-4z+8=0$ (6) $3y+5z=13$ (7) $2x-3y-6z=6$; $6x+3y-2z=18$ (11) $3x-7y+9z+13=0$ (13) 3, 4 ; எதிர்ப்பக்கங்களில் உள்ளன. (14) $\frac{1}{6}$; 2 (15) $4x-7y+3z=28$ (16) $2x+7y-5z-21=0$; $11x+19y+31z-18=0$; இரண்டாவது தளமே குறுங்கோணத்தை இரு சமக் கூறிடுகின்றது. (19) (i) $\cos^{-1}\frac{4}{21}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{4}{9}$ (20) $\frac{\sqrt{1218}}{2}$ (22) $\frac{2}{3}$ (23) $xyz=6k^3$

பயிற்சி 3

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (2) $x-2=y-3=z-4$

(3) $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{-8}=\frac{z-7}{1}$, $\frac{x+7}{9}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{5}$

(4) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$; $\frac{3x+1}{3}=\frac{3y+2}{-6}=\frac{z}{1}$

(5) $(3, -5, -3)$; $(1, -1, -7)$ (6) $(1, 3, -2)$

(7) $(1, -2, 7)$ (8) $\cos^{-1}\dfrac{10}{\sqrt{418}}$; $\dfrac{x}{14} = \dfrac{y}{-11} = z$

(9) $\left(\dfrac{-5}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ (10) $(-3, 4, -1)$; $(-3, 5, 2)$ (12) $90°$

(13) $x=1,\ 5y+z=13$ (14) $x=2,\ 2y-z=2$ (15) $\dfrac{x+6}{5} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z+6}{6}$; $(4, 2, 6)$; $(-1, -1, 0)$ (16) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$

(17) $(7, 5, 0)$; $(0, 1, 1)$; $\sqrt{66}$ (18) $2x=y=-2z$; $2x=-2y=z$ (19) $3x-3y-2z+5=0=8x+2y+9z-1$ (20) $3x-8y+7z+4=0=3x+2y+z$; $\dfrac{x+1}{-11} = \dfrac{y-1}{9} = \dfrac{z-1}{15}$

(21) $\left(\dfrac{a+2b}{5}, \dfrac{2a+4b}{5}, 1\right)$; $\left(\dfrac{a-2b}{5}, \dfrac{4b-2a}{5}, -1\right)$

(22) $\sqrt{\dfrac{2109}{110}}$; $\cos^{-1}\left(\dfrac{41}{\sqrt{4620}}\right)$ (23) $\sqrt{\dfrac{27}{14}}$

(24) $9x-2y-5z+4=0$; $\left(\dfrac{4}{\sqrt{165}}, \dfrac{-7}{\sqrt{165}}, \dfrac{10}{\sqrt{165}}\right)$

(25) $-\dfrac{10}{7}$ (28) (i) $\dfrac{x+2}{6} = -(y-2) = z+3$; $(4, 1, -2)$

(ii) $-\dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{4}$; $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$

(32) $l(x-f) + m(y-g) + n(z-h) = 0$;
$$\frac{ax+by+cz+d}{af+bg+ch+d} = \frac{a'x+b'y+c'z+d'}{a'f+b'g+c'h+d'}$$

(37) (i) $x=y=z$; $4\sqrt{3}$ (ii) $x-4=\frac{1}{3}(y-2) = -\frac{1}{5}(z+3)$; $\sqrt{35}$ (41) 2 (42) (i) புள்ளி (ii) நேர்க்கோடு (iii) முக்கோணப் பட்டகம்.

பயிற்சி 4

(4) $(a+b)n^2+am^2+bl^2=0$

பயிற்சி 5

(1) (i) $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-10=0$ (ii) $4x^2+4y^2+4z^2-12y-16z+11=0$ (2) (i) $(3, -4, 5)$; 7 (ii) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; 1

(3) (i) $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$ (ii) $x^2+y^2+z^2-2y-4z-9=0$ (5) $x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0$ (10) $2x+3y-4z=29$ (11) $(2, 4, 5)$; $\sqrt{7}$ (12) $(-1, 4, -2)$ (13) $2x+2y-z-2=0$; $x+2y-2z+14=0$ (14) $(0, 0, -2)$; $(4, -2, 2)$ (15) $2(x^2+y^2+z^2)-3x+y+4z=0$ (16) $x^2+y^2+z^2-6x+2z+1=0$ (20) (i) $32(x^2+y^2+z^2)-8(x+y+z)+1=0$ (ii) $81(x^2+y^2+z^2)-126(x+y+z)+98=0$ (21) $3(x^2+y^2+z^2)-2x-3y-4z-22=0$ (22) $x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0$; $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$ (23) $9(x^2+y^2+z^2)+2x+26y-34z+13=0$ (24) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$ (25) $5(x^2+y^2+z^2)-13x+19y-25z+45=0$ (26) $x^2+y^2+z^2+7x+10y-5z+12=0$ (27) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$ (28) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{3}$ (31) $(2, -3, 4)$; $(-2, 3, -4)$ (32) $x^2+y^2+z^2+4x+2y+6z-11=0$; $5(x^2+y^2+z^2)-8x-4y-12z-13=0$ (33) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-5z+5=0$; $5(x^2+y^2+z^2)-2x-4y-5z+1=0$

பயிற்சி 6

(1) $a(x-\alpha)^2+b(y-\beta)^2+c(z-\gamma)^2=0$

(3) $\left(\frac{\alpha z-x\gamma}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta z-y\gamma}{b}\right)^2=\left(z-\gamma\right)^2$

(4) $x^2-3y^2+z^2-2xy+8y-4=0$ (5) $5x^2+3y^2+z^2-2xy-6yz-4zx+6x+8y+10z=26$ (7) $3yz+16zx+15xy=0$

(10) $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$; $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$

(11) (i) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ (iii) $\frac{\pi}{6}$

(15) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{4}$; $\frac{x}{-11}=\frac{y}{2}=\frac{z}{7}$

(16) $a(x^2+z^2)+b(y^2+z^2)=1$ (18) $y=z$ (20) $64x^2+9y^2+25z^2-30yz-80zx+48xy=0$ (23) $9x^2+9y^2+5z^2-12yz+6zx-6x+12y-10z=76$ (24) $a(lz-nx)^2+b(ny-mz)^2+n^2=0$

(25) $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\frac{[l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)]^2}{(l^2+m^2+n^2)}=\gamma^2$$

(27) $45x^2+40y^2+13z^2+36yz-24zx+12xy-42x-280y-126z+294=0$ (28) $2x^2+3z^2-2zx-2x-2z-11=0$ (29) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=1$

பயிற்சி 7

(1) $4x+6y+3z=5$; $2x-12y+9z=5$ (2) $12x+3y+8z=\pm 36$ (3) $3x+12y-6z\pm 17=0$; $(\pm 1, \mp 2, \mp \frac{2}{3})$

(12) $\Sigma \dfrac{(\alpha-a)f}{(x-f)}(b\gamma-c\beta)=0$

(13) $\Sigma a\alpha\alpha'=1$; $\Sigma a\alpha' l=0$; $\Sigma a\alpha l'=0$; $\Sigma all'=0$ (14) $x+6y-10z+20=0$

(15) $\dfrac{a^2x^2}{\alpha}+\dfrac{b^2y^2}{\beta}+\dfrac{c^2z^2}{\gamma}=(ax^2+by^2+cz^2)^2$

(16) $(2_2\ -3,\ 1)$

பயிற்சி 8

(1) $(3, 3, -3)$ (3) $4x-3y-z+5=0$ (4) $x-2=\frac{1}{2}(y-3)=\frac{1}{3}(z-4)$ (5) $(-2, -2, 4)$

BIBLIOGRAPHY

1. **S. L. Green** — Algebraic Solid Geometry
2. **W. H. Mc Crea** — Analytical Geometry of Three Dimensions (chapters I, II & III)
3. **C. Smith** — Solid Geometry (chapters I, II, III, IV & VI)
4. **Robert J. T. Bell** — Coordinate Solid Geometry (Except chapter VIII)
5. **S. M. Mathur** — A New Text Book of Analytical Solid Geometry (I Vol.) & (II Vol. Chapters I—IV)
6. **Shanti Narayan** — Analytical Solid Geometry (Except Chapters IX & XI)

கலைச் சொற்கள்

(தமிழ்—ஆங்கிலம்)

A

Algebra	—	இயற்கணிதம்
Altitude (of triangle)	—	செங்கோடு
Angle	—	கோணம்
,, (right)	—	செங்கோணம்
,, (acute)	—	குறுங்கோணம்
,, (obtuse)	—	விரிகோணம்
,, (eccentric)	—	துணைவட்டக் கோணம்
,, (Semi—Vertical)	—	அரை உச்சிக்கோணம்
Area	—	பரப்பு
Arbitrary	—	ஏதேனும், யாதானும்
Approximate	—	தோராயமாக
Assumption	—	தற்கோள்
Asymptote	—	அணுகு கோடு
Asymptotic cone	—	அணுகு கோட்டுக் கூம்பு
Axis	—	அச்சு
,, (Major)	—	நெட்டச்சு
,, (Minor)	—	குற்றச்சு
,, (Transverse)	—	குறுக்கச்சு
,, (Conjugate)	—	துணையிய அச்சு

B

Bisect	—	இருசமக் கூறிடு
Bisector	—	சமவெட்டி
Base	—	அடி

C

Calculate	—	கணி
Case	—	வகை
Change	—	மாற்று, மாற்றம்
Centre	—	மையம்
,, (Circum)	—	சுற்றுவட்ட மையம்

,, (in—)	—	உள் வட்ட மையம்
,, (ex—)	—	வெளி வட்ட மையம்
,, (ortho—)	—	செங்கோட்டு மையம்
Centroid	—	நடுக்கோட்டுச் சந்தி
Chord	—	நாண்
Circle	—	வட்டம்
Circle (Circum—)	—	சுற்றுவட்டம்
,, (in—)	—	உள் வட்டம்
,, (Ex—)	—	வெளி வட்டம்
,, (auxiliary)	—	துணை வட்டம்
Common	—	பொது
Cone	—	கூம்பு
,, (right circular)	—	நேர்வட்டக் கூம்பு
,, (tangent)	—	தொடு கூம்பு
,, (reciprocal)	—	தலைகீழ்க் கூம்பு
Conic	—	கூம்பு வளைவரை
Conicoid	—	கூம்பு வளையவுரு
Conjugate	—	துணை, துணையிய
,, (Harmonic)	—	இசைத் துணை
Condition	—	நிபந்தனை
Coincide	—	ஒன்றுபடு
Compare	—	ஒப்பிடு
Co-factor	—	துணைக்காரணி
Column	—	நிரல்
Constant	—	மாறிலி, மாறுத
Consistent	—	இசையுள்ள
Contact	—	தொடுகை
Contradiction	—	முரண்பாடு
Converse	—	மறுதலை
Convention	—	மரபு
Co-efficient	—	குணகம், கெழு
Coplanar	—	ஒருதள
Corollary	—	கிளைத்தேற்றம்
Co-ordinates	—	ஆய எண்கள்
,, (Cartesian)	—	தெக்காட்டின் ஆய எண்கள்
,, (Rectangular)	—	செவ்வக ஆய எண்கள்
,, (Polar)	—	கோண தூர ஆய எண்கள்
,, (Cylindrical)	—	உருளை ஆய எண்கள்
Co-ordinate (Planes)	—	ஆயத் தளங்கள்
,, (axes)	—	ஆய அச்சுக்கள்

Curve — வளைவரை
Cylinder — உருளை
,, (Right circular) — நேர்வட்ட உருளை
,, (Enveloping) — தழுவு உருளை

D

Deduce — உய்த்தறி
Define — வரையறு
Definition — வரையறை
Degree — படி
Dependent — சார்ந்த
Derivative — வகைக் கெழு
,, (Partial) — பகுதி வகைக்கெழு
Determinant — அணிக் கோவை
Diagonal — மூலை விட்டம்
Diameter — விட்டம்
Diametrically opposite — விட்டமெதிர்
Difference — வித்தியாசம்
Dimension — பரிமாணம்
Direction — திசை
Direction—Cosines — திசைக் கொசைன்கள்
Direction—Ratio — திசைத் தகவு
Distance — தொலைவு
,, (Shortest) — மீச்சிறு தொலைவு
Discriminant — தன்மைகாட்டி

E

Edge — விளிம்பு
Ellipse — நீள்வளையம்
Ellipsoid — நீள்வளையவுரு
Eliminate — நீக்கு
Eliminant — நீக்கற்பலன்
Equal — சமமான
Equation — சமன்பாடு
,, (Simultaneous) — ஒருங்கமைச் சமன்பாடு
,, (Combined) — கூட்டுச் சமன்பாடு
,, (General) — பொதுச் சமன்பாடு
Expansion — விரிவு
Expression — கோவை

External — புறம்பான, வெளியான
Extremity — முனை

F

Face — முகம்
Fixed — நிலைத்த
Formula — வாய்பாடு
Form — வடிவம்
,, (Simple) — எளிய வடிவம்
,, (Standard) — திட்டமான வடிவம்

G

Geometry — வடிவ கணிதம்
,, (Analytical) — பகுமுறை வடிவ கணிதம்
,, (Solid) — கன வடிவ கணிதம்
,, (Metrical) — அளவு முறை வடிவ கணிதம்
Generator — பிறப்பாக்கி, பிறப்பிக்குங் கோடு

H

Homogeneous — சமபடித்தான
Hyperbola — அதிபரவளை
,, (Rectangular) — செவ்வக அதிபரவளை
Hyperboloid of one Sheet — ஒருமடி அதிபரவளைவுரு
Hyperboloid of two Sheets — இருமடி அதிபரவளைவுரு

I

Identity — முற்றொருமை
Identical — சர்வ சமமான, முற்றிலும் சமமான
Image — பிம்பம்
Independent — சார்பிலா
Infinity — முடிவிலி, கந்தழி
Intersect — வெட்டு, சந்தி
Internal — உள்ளான, உள்
Interpretation — பொருள்
Invariant — மாற்றமிலி

L

Latus—vectum	—	நேர்-அகலம்
Length	—	நீளம்
Limit	—	எல்லை
Limiting points	—	எல்லைப் புள்ளிகள்
Locus	—	இயங்குவரை

M

Mathematical physics	—	கணித முறை பௌதிகவியல்
Matrix	—	அணி
Measurement	—	அளவை
Median	—	நடுக்கோடு
Middle	—	நடு, மத்திய
Mutual	—	ஒன்றுக்கொன்று

N

Nature	—	தன்மை
Negative	—	எதிர்
Normal	—	செங்கோடு
Note	—	குறிப்பு
Notation	—	குறியீடு
Number	—	எண்
,, (Real)	—	மெய்யெண்
,, (Imaginary)	—	கற்பனையெண்
Numerical value	—	பெறுமானம்

O

Origin	—	ஆதி
Orthogonal	—	செங்குத்து, செங்குத்தான
,, (Projection)	—	குத்து வீழல்

.P

Parallel	—	இணையான
Parallelopiped	—	இணைகரத் திண்மம்
Parameter	—	துணையலகு

Pair — சோடி
Parabola — பரவளை
Paraboloid — பரவளைவுரு
,, (elliptic) — நீள்வளைய பரவளைவுரு
,, (Hyperbolic) — அதிபரவளைவுப் பரவளைவுரு
Perpendicular — செங்குத்தான
Plane — தளம்
Point — புள்ளி
Point of contact — தொடுபுள்ளி
Pole — இசைப்புள்ளி
Polar Plane — இசைத்தளம்
Polar lines — இசைக் கோடுகள்
Polyhedron — பன்முகி
Positive — நேர்
Position — நிலை
Prism — பட்டகம்
Principle — கோட்பாடு, விதி
Principal — தலையாய
Product — பெருக்கற்பலன்
Property — பண்பு
Proportion — விகிதப் பொருத்தம்
Proof — நிறுவல்

Q

Quantity — கணியம்
Quadric — இருபடி

R

Radius — ஆரம்
Radical plane — சமத் தொடுகோட்டுத்தளம்
,, line — சமத் தொடுகோட்டுக்குரிய கோடு
,, point — சமத் தொடுகோட்டுப் புள்ளி
Ratio — விகிதம், தகவு
Rectangle — செவ்வகம்
Relation — தொடர்பு
Represent — குறி, காட்டு

Rotate	—	சுழற்று
Rotation	—	சுழற்சி
Row	—	நிரை
Root	—	மூலம்
Ruled surface	—	வரைபரப்பு

S

Section	—	வெட்டுமுகம், பிரிவு
,, (plane)	—	தள வெட்டுமுகம்
Segment	—	துண்டு
Secant	—	வெட்டுக்கோடு
Scheme	—	திட்டம்
Sense	—	போக்கு
Set	—	கணம், தொகுதி
Sign	—	குறி
Skew lines	—	வெட்டாக் கோடுகள்
Solid	—	கன உருவம்
Solve	—	தீர்
Space	—	வெளி
Sphere	—	கோளம்
,, (Coaxal)	—	ஒரே தொடுதளக் கோளங்கள்
,, (Director)	—	குத்துத் தொடுதளக் கோளம்
Square	—	வர்க்கம், சதுரம்
,, (root)	—	வர்க்க மூலம், இருபடி மூலம்
Subject	—	பாடம்
Standard	—	தரமான
Straight line	—	நேர்க்கோடு
Surface	—	மேற்பரப்பு
Sum	—	கூடுதல்
Substitute	—	பிரதியிடு
Symbol	—	குறியீடு
Symmetry	—	சமச்சீர்
System	—	முறை, தொகுதி

T

Tangent	—	தொடுகோடு, தொடுவரை
Tangent plane	—	தொடுதளம்

Term — உறுப்பு
Tetrahedron — நான்முகி
Theorem — தேற்றம்
Triangle — முக்கோணம்
,, (isosceles) — இரு சமபக்க முக்கோணம்
,, (equilateral) — சமபக்க முக்கோணம்
Translation — இடப் பெயர்ச்சி
Transformation — நிலைமாற்றம்

U

Unit — அலகு

V

Value — மதிப்பு
Variable — மாறி
Vector — திசையி
Vertex — உச்சி
Volume — கன அளவு

Z

Zero — பூச்சியம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை
1971 ஜூலை வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

				ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	... 6	50
*1-A	,, II	...	,,	... 9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	... 4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	,,	... 4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	...	சோணசலம்	... 7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	...	மு. ஆரோக்கியசாமி	... 6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	திருமதி. ஆர். தாமரஜாட்சி	... 12	00
7.	பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I	...	தி. சி. மோகன்	... 12	00
8.	,, II	...	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	... 7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	...	சி. வேலாயுதம்	... 6	75
*11.	,, II	...	,,	... 11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	... 5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	... 5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	... 4	75

* மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதாரவளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறுவிளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னுட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00

37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுருத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணுமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
54.	,, IV	,,	8	00

* மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	5	00
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம்.எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50

(தொடர்ச்சி)

76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	5 00
77.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	...	6 00

அரசியல்

78.	அரசியல் அமைப்புகள்	...	ஜே. இராமச்சந்திரன்	...	4 62
79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	...	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	...	7 50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	...	வீ. கண்ணையா	...	4 75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	டி. செல்லப்பா	...	8 50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	8 50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	...	திருமதி. நூர்ஜஹான் பாவா	...	16 00
84.	,, II	...	,,	...	13 25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	9 00
86.	,, II	...	இ. ஜெகதீசன்	...	7 25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	7 50
88.	,, II	...	டி. செல்லப்பா	...	7 50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	...	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	...	9 25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	...	வீ. கண்ணையா	...	6 25
91.	,, II	...	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	...	5 75
92.	,, III	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	7 25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	...	க. சந்தானம்	...	4 25

* மூல நூல் (Original Book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
97.	,, —II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50

*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3 50
112.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6 50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5 50
114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3 50
115.	,, II	,,	6 00
116.	மெய்ப்பொருளியல்-ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6 00

அறவியல்

117.	அறவியல்-ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8 50

அளவையியல்

118.	அளவையியல் தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2 50

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4 75
120.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5 50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3 50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10 50

* மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

				ரூ.	காசு
*123.	ஆசியா—I	...	கொ. சேஷ நரசிம்மன்	... 9	50
*124.	,, II	...	,,	... 8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	...	ஏ. எஸ். நாராயணன்	... 8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	...	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலுமேலு	... 6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	... 9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	... 3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	... 3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	... 6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	... 5	50
*133.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மனுபன்	... 4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	...	கொ. சேஷ நரசிம்மன்	... 10	00
136	,, II	...	,,	... 5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	...	திருமதி. இராதா	... 9	50
*138.	,, II	...	,,	... 8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	... 5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விஸ்வநாதன்	... 4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம்	... 9	50
143.	,, II	...	எம். கார்த்திகேயன்	... 12	00

144.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5 75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10 75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10 00
147.	„ II	இராஜகோபாலன்	14 00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6 50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	4 25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	„	3 00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	3 25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12 00

பௌதிகவியல்

153.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10 00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6 . 00
*155.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4 75

* மூல நூல் (Original Book)

விஞ்ஞானம் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*157.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலே	3	50
*158.	தாவரம்-வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*159.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தம்	6	50

மருத்துவம்

*161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலே	8	25
*163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
166.	,, II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25

பொறியியல்

168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50

சட்டம்

*170.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00

பொது நூல்கள்

171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
173.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலேயும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*175.	உணவும் ஊட்டமும்	தி. வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	6	25

புகுமுக (P.U.C) வகுப்புக்களுக்குரியவை

*177.	உலக வரலாறு	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*178.	பொருளாதாரம்	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	கு. ஆளுடையபிள்ளை	2	50
*180.	,, II	,,	2	25
*181.	பௌதிகம்	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	6	00
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	எஸ். சம்பத்	7	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*185.	,, II	,,	3	00

*மூல நூல் (Original Book)

புதுமுக (P.U.C.)வகுப்புகளுக்குரியவை(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	காசு
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	... 7	00
*187.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல் II	...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	... 4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	ஆர். மகாதேவன்	... 4	75
*189.	,, II	...	,,	... 3	25
*190.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	... 7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	... 5	50
*192.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	...	பெ மா. அண்ணுமலை	... 7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம்	... 4	00

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி. எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள்—கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)

*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	ஆர். நாகராசன்	... 6	25
*196.	,, II	...	,,	... 5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	கே. நாச்சிமுத்து	... 5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி	... 4	50
*199.	,, II	...	,,	... 3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I	...	பி. தங்கராஜன்	... 4	00
*201.	,, II	...	,,	... 3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப் பாடம்	...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	... 4	50

*203.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	... 4	75
*204.	,, II ...	,,	... 4	50
*205.	,, III ...	,,	... 4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், ,, ஆர். சபேசன்	... 7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி-2) (முதல் புத்தகம்	கா. வே. சுப்பிரமணியன்	... 6	00
*208.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	,,	... 4	50
*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. பி. கந்தசாமி	... 4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் ...	எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டி. முருகையன்	... 5	00

வேதியியல் (Chemistry)

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்— துணைப் பாடம் ...	டாக்டர் முத்துக்குமாரசாமி	... 2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்— சிறப்புப் பாடம் ...	டி. இராமலிங்கம்	... 2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. சக்திவேலு	... 4	00
*215.	,, II ...	,,	... 3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	... 6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்பும் பாடம்—I ...	பி. டி. முனியப்பா	... 4	00
*218.	,, II ...	,,	... 4	25

*மூல நூல் (Original Book)

வேதியியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	ஆர். துள்சிதாஸ் ...	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன் ...	4	50
*221.	,, II ...	,, ...	3	75
*222.	செய்முறை கரிம வேதியியல்-சிறப்புப் பாடம் ...	என். ஆறுமுகம் ...	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	பிஎல். இராமசாமி ...	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்-I	எம். ஆட்கொண்டான் ...	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி.I (இரண்டாம் புத்தகம்)	திரு. கண்ணபிரான் ...	4	75
*226.	,, (மூன்றும் புத்தகம்)	,, ...	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-2 (முதல் புத்தகம்) ...	,, ...	5	75
*228.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	,, ...	6	00

கணிதம் (Mathematics)

*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்—I	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி ...	4	25
*230.	,, II ...	,, ...	3	25
*231.	தொகுமுறை வரை கணிதம்-சிறப்புப் பாடம்...	ஆர். மகாதேவன் ...	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	எம். எம். இராமசாமி ...	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	வி. அரங்கநாதன் ...	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப் பாடம் ...	ஆர்.அனுமந்தராவ் ...	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜகோபாலன் ...	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. சிவசுப்பிரமணியன் ...	2	75

*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன்பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆர். மகாதேவன்	... 2 00
*238.	கணிதம்—துணைப் பாடம்—பகுதி-2 ...	ஆர். அய்யாசாமி	... 5 75
*239.	வானியல்...சிறப்புப் பாடம்-(முதல்புத்தகம்)	தி. கோவிந்தராசன், கோ. முத்துசாமி	... 5 50
*240.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)...	,,	... 3 75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	... 7 00

புள்ளியியல் (Statistics)

*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம் ...	எஸ். கருப்பையா	... 3 50

விலங்கியியல் (Zoology)

*243.	முதுகெலும்பற்றவை-1—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆர். முருகேசன்	... 6 00
*244.	,, 2 ,, ...	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	... 6 00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை-1—சிறப்புப் பாடம் ...	திருமதி ராணி கந்தசாமி	... 5 00
*246.	,, 2 ,, ...	,,	... 9 75
*247.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை-2—சிறப்புப் பாடம் ...	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	... 11 75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்-சிறப்புப்பாடம்...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 9 00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப் பாடம் ...	என். இராமலிங்கம்	... 9 00
*250.	முதுகு நாணுள்ளவை—துணைப் பாடம் ...	வி. சேது	... 6 00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	என். இராமலிங்கம்	... 5 50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	பெ. மா. அண்ணாமலை	... 5 25

* மூல நூல் (Original Book).

விலங்கியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற் செயலியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. ஆர். கிருஷ்ணன் ...	4	75
*254.	,, ,, II ...	,, ...	6	50
*255.	பரிணாமம் ...	எஸ். ஆப்ரகாம் ...	6	25

தாவரவியல் (Botany)

256.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜசேகரன் ...	11	00
*257	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்...	கே. பாலச்சந்திர கணேசன் ...	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு ...	7	25
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம் ...	எஸ். சுந்தரம் ...	9	50
*260.	தாவரவியல்— துணைப்பாடம் ...	பா. இராசாராம் ...	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையில், மரபியல், உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப் பாடம் ...	கே. பெரியசாமி ...	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன் ...	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜசேகரன் ...	10	25
*264.	தாலோஃபைட்டா (பாசிகளும்பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம் ...	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆ. சம்பத்குமார் ...	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜசேகரன் ...	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

EMARA PUBLIC L